Conjuntos acotados en espacios métricos

Objetivos. Estudiar varias descripciones equivalentes de conjuntos acotados en espacios métricos.

Prerrequisitos. Espacio métrico.

1 Definición (el diametro de un conjunto)**.** Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$.

$$\operatorname{diam}(Y) \coloneqq \sup\{d(x,y)\colon \ x,y \in Y\}.$$

En el caso $Y = \varnothing$ se pone $\operatorname{diam}(Y) \coloneqq 0$.

2 Definición. Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es *acotado* si $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$.

3 Ejercicio (monotonía del diámetro)**.** Sea X un espacio métrico y sean $Y, Z \subseteq X$ tales que $Z \subseteq Y$. Demuestre que $\operatorname{diam}(Z) \le \operatorname{diam}(Y)$.

4 Ejercicio (subconjuntos de subconjuntos acotados son acotados)**.** Sea X un espacio métrico y sean $Y, Z \subseteq X$ tales que Y es acotado y $Z \subseteq Y$. Demuestre que Z es acotado.

5 Ejemplo. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Entonces $\operatorname{diam}([a,b]) = b - a$, y $[a,b]$ es acotado.

6 Ejemplo. Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces $\operatorname{diam}(B(a,r)) \le 2r$, y la bola $B(a,r)$ es acotada.

7 Proposición. *Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$ tal que $Y \neq \varnothing$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$.

(b) existen a en Y y $r > 0$ tales que $Y \subseteq B(a,r)$.

(c) existen a en X y $r > 0$ tales que $Y \subseteq B(a,r)$.

8 Ejercicio (uniones finitas de subconjuntos acotados son acotadas)**.** Sea X un espacio métrico y sean $Y_1, \ldots, Y_m$ subconjuntos acotados de X. Demuestre que $Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$ es acotado.