Formas sesquilineales acotadas
(un tema de la unidad “Operadores en espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

28 de junio de 2022

Objetivos:

- definir el concepto de la norma extendida de la forma sesquilineal;
- definir el concepto de forma sesqulineal acotada;
- definir el espacio de las formas sesquilineales acotadas.

Objetivos:

- definir el concepto de la norma extendida de la forma sesquilineal;
- definir el concepto de forma sesqulineal acotada;
- definir el espacio de las formas sesquilineales acotadas.

Prerrequisitos:

- formas sesquilineales;
- supremos e ínfimos;
- funcionales lineales acotados;
- la norma de un funcional lineal acotado.

Repaso: formas sesquilineales

Definición (forma sesquilineal)

Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales complejos.

Una función $f\colon V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$ se llama forma sesquilineal,

si es lineal respecto al primer argumento y conjugadamente lineal respecto al segundo.

La norma extendida de una forma sesquilineal

Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert.

Suponemos que los productos internos son lineales respecto al primer argumento.

La norma extendida de una forma sesquilineal

Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert.

Suponemos que los productos internos son lineales respecto al primer argumento.

Definición

Sea $f\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Definimos $N(f)$ mediante la siguiente regla:

$$N(f) := \sup_{\substack{u \in H_1 \setminus \{0_{H_1}\} \\ v \in H_2 \setminus \{0_{H_2}\}}} \frac{|f(u,v)|}{\|u\|_{H_1} \, \|v\|_{H_2}}.$$

Formas sesquilineales acotadas

Definición

Sea $f\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Se dice que f es acotada, si $N(f) < +\infty$.

Formas sesquilineales acotadas

Definición

Sea $f\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Se dice que f es acotada, si $N(f) < +\infty$.

Definición

Denotamos por $\mathcal{S}(H_1, H_2)$ al conjunto de las formas sesquilineales acotadas $H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$.

Para $f \in \mathcal{S}(H_1, H_2)$, denotamos $N(f)$ por $\|f\|$.

Repaso: formas sesquilineales en $H \times H$

A partir de este momento, nos restringimos al caso $H_1 = H_2 = H$.

Suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo no nulo.

Repaso: formas sesquilineales en $H \times H$

A partir de este momento, nos restringimos al caso $H_1 = H_2 = H$.

Suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo no nulo.

Suponemos que el producto interno es lineal respecto al primer argumento.

Repaso: formas sesquilineales en $H \times H$

A partir de este momento, nos restringimos al caso $H_1 = H_2 = H$.
Suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo no nulo.

Suponemos que el producto interno es lineal respecto al primer argumento.

Definición (forma sesquilineal)

Una función $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ se llama forma sesqulineal,
si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo argumento.

Repaso: formas sesquilineales en $H \times H$

A partir de este momento, nos restringimos al caso $H_1 = H_2 = H$.
Suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo no nulo.

Suponemos que el producto interno es lineal respecto al primer argumento.

Definición (forma sesquilineal)

Una función $f \colon H^2 \to \mathbb{C}$ se llama forma sesqulineal,
si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo argumento.

Ejercicio. Sea $f \colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.
Demostrar que si $u = 0_H$ o $v = 0_H$, entonces $f(u, v) = 0$.

La norma extendida de una forma sesquilineal

Definición

Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Definimos $N(f)$ mediante la siguiente regla:

$$N(f) := \sup_{\substack{u\in H\setminus\{0_H\} \\ v\in H\setminus\{0_H\}}} \frac{|f(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Algunas propiedades elementales de $N(f)$

En lo que sigue, suponemos que $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal.

$$N(f) := \sup_{\substack{u\in H\setminus\{0_H\}\\ v\in H\setminus\{0_H\}}} \frac{|f(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Algunas propiedades elementales de $N(f)$

En lo que sigue, suponemos que $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal.

$$N(f) := \sup_{\substack{u\in H\setminus\{0_H\}\\ v\in H\setminus\{0_H\}}} \frac{|f(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$\forall u,v\in H \qquad |f(u,v)| \le N(f)\,\|u\|\,\|v\|.$$

Algunas propiedades elementales de $N(f)$

En lo que sigue, suponemos que $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal.

$$N(f) := \sup_{\substack{u \in H\setminus\{0_H\} \\ v \in H\setminus\{0_H\}}} \frac{|f(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$\forall u, v \in H \qquad |f(u,v)| \le N(f)\,\|u\|\,\|v\|.$$

Ejercicio. Demostrar que si $N(f) = 0$, entonces f es la función constante cero.

Otras fórmulas equivalentes para $N(f)$

Ejercicio. Demostrar que

$$N(f) = \sup_{\substack{u \in H:\ \ \|u\|=1 \\ v \in H:\ \ \|v\|=1}} |f(u,v)|.$$

Otras fórmulas equivalentes para $N(f)$

Ejercicio. Demostrar que

$$N(f) = \sup_{\substack{u \in H:\ \ \|u\|=1 \\ v \in H:\ \ \|v\|=1}} |f(u,v)|.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$N(f) = \sup_{\substack{u \in H:\ \ \|u\|\le 1 \\ v \in H:\ \ \|v\|\le 1}} |f(u,v)|.$$

Otras fórmulas equivalentes para $N(f)$

Ejercicio. Demostrar que

$$N(f) = \sup_{\substack{u \in H:\ \ \|u\|=1 \\ v \in H:\ \ \|v\|=1}} |f(u,v)|.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$N(f) = \sup_{\substack{u \in H:\ \ \|u\|\le 1 \\ v \in H:\ \ \|v\|\le 1}} |f(u,v)|.$$

Ejercicio. Demostrar que $N(f)$ es el mínimo del conjunto

$$\Big\{ C \in [0,+\infty] : \quad \forall u,v \in H \quad |f(u,v)| \le C\,\|u\|\,\|v\| \Big\}.$$

Formas sesquilineales acotadas

Definición

Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Se dice que f es acotada, si $N(f) < +\infty$.

Formas sesquilineales acotadas

Definición

Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Se dice que f es acotada, si $N(f) < +\infty$.

Definición

Denotamos por $\mathcal{S}(H)$ al conjunto de las formas sesquilineales acotadas $H^2 \to \mathbb{C}$.

Para $f \in \mathcal{S}(H)$, denotamos $N(f)$ por $\|f\|$.

Formas sesquilineales acotadas, propiedades elementales

Ejercicio.

Sea $f \in \mathcal{S}(H)$. Mostrar que

$$\forall u, v \in H \qquad |f(u,v)| \leq \|f\| \, \|u\| \, \|v\|.$$

Formas sesquilineales acotadas, propiedades elementales

Ejercicio.

Sea $f \in \mathcal{S}(H)$. Mostrar que

$$\forall u, v \in H \qquad |f(u, v)| \leq \|f\| \, \|u\| \, \|v\|.$$

Ejercicio.

Sea $f \colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal y sea $C \geq 0$. Supongamos que

$$\forall u, v \in H \qquad |f(u, v)| \leq C \, \|u\| \, \|v\|.$$

Demostrar que $f \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f\| \leq C$.

Formas sesquilineales acotadas, propiedades elementales

Ejercicio.

Demostrar que $\mathcal{S}(H)$ es un espacio normado.

Denotamos por $0_{\mathcal{S}(H)}$ el cero de este espacio, es decir, la forma sesquilineal nula.

Formas sesquilineales acotadas, propiedades elementales

Ejercicio.

Demostrar que $\mathcal{S}(H)$ es un espacio normado.

Denotamos por $0_{\mathcal{S}(H)}$ el cero de este espacio, es decir, la forma sesquilineal nula.

Ejercicio.

Sea $f \in \mathcal{S}(H)$ y sean $x, y \in H \setminus \{0_H\}$. Mostrar que

$$\|f\| \geq \frac{|f(x,y)|}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Ejemplo

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $a \in L^\infty(X, \mu)$.
Sea $H = L^2(X, \mu)$. Definimos $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(u, v) := \int_X a\, u\, \overline{v}\, \mathrm{d}\mu.$$

Demostrar que $f \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f\| \leq \|a\|_\infty$.

Ejemplo

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $a \in L^\infty(X, \mu)$.
Sea $H = L^2(X, \mu)$. Definimos $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(u, v) := \int_X a\, u\, \overline{v}\, \mathrm{d}\mu.$$

Demostrar que $f \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f\| \leq \|a\|_\infty$.

Ejercicio más interesante: mostrar que $\|f\| = \|a\|_\infty$.

Ejemplo

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $a \in L^\infty(X, \mu)$.
Sea $H = L^2(X, \mu)$. Definimos $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(u, v) := \int_X a\, u\, \overline{v}\, \mathrm{d}\mu.$$

Demostrar que $f \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f\| \leq \|a\|_\infty$.

Ejercicio más interesante: mostrar que $\|f\| = \|a\|_\infty$.

Se recomienda considerar primero el caso $\mu(X) < +\infty$.

Ejemplo

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y sea $H := \mathbb{C}^n$. Definimos $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(u, v) := v^* A\, u.$$

Mostrar que

$$f(u, v) = \sum_{j,k=1}^{n} A_{j,k} u_k \overline{v_j}.$$

Mostrar que $f \in \mathcal{S}(H)$.

Ejemplo (cota superior de Schur)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $K \in \mathcal{M}(X \times X, \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \mathbb{C})$.
Supongamos que

$$M_1 := \sup_{x \in X} \int_X |K(x, y)| \, \mathrm{d}\mu(y) < +\infty, \qquad M_2 := \sup_{y \in X} \int_X |K(x, y)| \, \mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

Denotamos $L^2(X, \mu)$ por H. Definimos $f \colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(u, v) := \int_X \int_X K(x, y) u(x) v(y) \, \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\mu(y).$$

Mostrar que la integral existe en el sentido de Lebesgue, $f \in \mathcal{S}(H)$ y

$$\|f\| \leq \sqrt{M_1 M_2}.$$

Ejemplo: la forma sesquilineal asociada a un operador lineal acotado

Ejercicio.

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Definimos $f_A\colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$f_A(u, v) := \langle Au, v \rangle.$$

Demostrar que $f_A \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f_A\| = \|A\|$.

Ejemplo: la forma sesquilineal asociada a un operador lineal acotado

Ejercicio.

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Definimos $f_A \colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$f_A(u, v) := \langle Au, v \rangle.$$

Demostrar que $f_A \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f_A\| = \|A\|$.

En el futuro veremos que cada forma sesquilineal acotada se puede representar así.

Formas sesquilineales acotadas y su continuidad como funciones $H^2 \to \mathbb{C}$

Tratamos H^2 como espacio vectorial normado con la norma

$$\|(u, v)\| := \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}.$$

Formas sesquilineales acotadas y su continuidad como funciones $H^2 \to \mathbb{C}$

Tratamos H^2 como espacio vectorial normado con la norma

$$\|(u, v)\| := \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}.$$

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{S}(H)$. Mostrar que la función f es continua.

Formas sesquilineales acotadas y su continuidad como funciones $H^2 \to \mathbb{C}$

Tratamos H^2 como espacio vectorial normado con la norma

$$\|(u,v)\| := \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}.$$

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{S}(H)$. Mostrar que la función f es continua.

Ejercicio. Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.
Supongamos que f es continua en el punto $(0_H, 0_H)$. Demostrar que f es acotada.

La adjunta de la forma sesquilineal acotada

Ejercicio.

Sea $f \in \mathcal{S}(H)$. Definimos $f^*\colon H^2 \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:

$$f^*(u, v) := \overline{f(v, u)}.$$

Demostrar que $f^* \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f^*\| = \|f\|$.

Fijar un argumento en una forma sesquilineal acotada

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{S}(H)$ y sea $u \in H$. Definimos $\xi\colon H \to \mathbb{C}$, $\eta\colon H \to \mathbb{C}$,

$$\xi(v) := f(v, u), \qquad \eta(v) := \overline{f(u, v)}.$$

Demostrar que $\xi, \eta \in H^*$ y

$$\|\xi\| \le \|f\| \, \|u\|, \qquad \|\eta\| \le \|f\| \, \|u\|.$$

Fijar un argumento en una forma sesquilineal acotada

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{S}(H)$ y sea $u \in H$. Definimos $\xi\colon H \to \mathbb{C}$, $\eta\colon H \to \mathbb{C}$,

$$\xi(v) := f(v, u), \qquad \eta(v) := \overline{f(u, v)}.$$

Demostrar que $\xi, \eta \in H^*$ y

$$\|\xi\| \le \|f\|\,\|u\|, \qquad \|\eta\| \le \|f\|\,\|u\|.$$

Observación. La idea de este ejercicio, combinada con el teorema de Fréchet–Riesz, se usa en la construcción del operador lineal acotado a partir de la forma sesquilineal acotada.

La norma de la forma sesquilineal y los valores de la forma cuadrática

Ejercicio.

Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q la forma cuadática inducida por f:

$$q_f(u) := f(u, u).$$

Denotemos por $R(f)$ el siguiente número:

$$R(f) := \sup_{u \in H \setminus \{0_H\}} \frac{|q_f(u)|}{\|u\|^2} = \sup_{u \in H \setminus \{0_H\}} \frac{|f(u, u)|}{\|u\|^2}$$

Mostrar que

$$R(f) \leq N(f).$$

La norma de la forma sesquilineal y los valores de la forma cuadrática

Problema.

En la notación del ejercicio anterior, demostrar o refutar la siguiente conjetura:
existe $C > 0$ tal que para cada forma sesquilineal f se cumple la desigualdad

$$N(f) \leq C\, R(f).$$