# Transformaciones lineales acotadas.
# La norma de una transformación lineal

**Objetivos.** Estudiar el concepto de la transformación lineal acotada y de la norma de la transformación lineal. Demostrar la equivalencia de varias definiciones.

**Prerrequisitos.** Operadores lineales, bolas en espacios normados, el supremo y el ínfimo.

**1 Proposición** (repaso: transformaciones lineales y operaciones con conjuntos)**.** *Sean $V$, $W$ espacios vectoriales complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Sean $P, Q \subseteq V$, $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces*

$$T[P+Q] = T[P] + T[Q], \qquad T[a+P] = T(a) + T[P], \qquad T[\lambda P] = \lambda T[P].$$

Dado un espacio normado complejo $V$, denotemos por $B_V$ su bola unitario con centro en $0_V$:

$$B_V \coloneqq \big\{ v \in V:\ \ \|v\|_V < 1 \big\}.$$

Sabemos que para cada $a$ en $V$ y cada $r > 0$

$$B_V(a, r) = a + r\, B_V.$$

Denotamos por $\tau_V$ la topología de $V$. Dado $a$ en $V$, pongamos

$$\tau_V(a) \coloneqq \big\{ Y \in \tau_V:\ \ a \in Y \big\}.$$

## Criterios de transformaciones lineales acotadas

**2 Definición** (transformación lineal acotada)**.** Sean $V$, $W$ espacios normados complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Decimos que $T$ es *acotada*, si existe $C \geq 0$ tal que para cada $x$ en $V$

$$\|Tx\|_W \leq C\, \|x\|_V.$$

**3 Proposición.** *Sean $V$, $W$ espacios normados complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(a) $T$ es acotada;*

*(b)* $T$ *es Lipschitz continua;*

*(c)* $T$ *es uniformemente continua;*

*(d)* $T$ *es continua;*

*(e)* $T$ *es continua en el punto* $0_V$*;*

*(f)* *el conjunto* $T[B_V]$ *es acotado en* $W$*;*

*(g)* $\sup\left\{\|Tx\|_W\colon\quad x\in V,\quad \|x\|_V\le 1\right\}<+\infty$*;*

*Parte de demostración.* Las siguientes implicaciones son obvias o muy simples y se dejan como ejercicios:

$$(a)\implies(b),\qquad (b)\implies(c),\qquad (c)\implies(d),\qquad (d)\implies(e).$$

Supongamos (e) y demostremos (f). Como $T(0_V)=0_W$ y $B_W\in\tau_W(0_W)$, existe $\delta>0$ tal que

$$T[\delta B_V]\subseteq B_W.$$

Luego

$$T[B_V]=\left(\frac{1}{\delta}\cdot\delta\right)T[B_V]=\frac{1}{\delta}\bigl(\delta\,T[B_V]\bigr)=\frac{1}{\delta}\,T[\delta\,B_V]\subseteq\frac{1}{\delta}\,B_W.$$

Como $\frac{1}{\delta}\,B_W$ es un conjunto acotado en $W$ (el diámetro de esta bola es $2/\delta$), su subconjunto $T[B_V]$ también es acotado.

Supongamos (f) y demostremos (a). Sea $C\coloneqq\sup\bigl\{\|Tx\|_W\colon\ x\in V,\ \|x\|_V\le 1\bigr\}$. Dado $v$ en $V$ tal que $v\ne 0_V$, pongamos

$$x\coloneqq\frac{1}{\|v\|_V}\,v.$$

Entonces $\|x\|_V=1$. Luego $\|Tx\|_W\le C$. Como $v=\|v\|_V\,x$, concluimos que

$$\|Tv\|_W=\bigl\|T(\|v\|_V\,x)\bigr\|_W=\bigl\|\|v\|_V\,T(x)\bigr\|_W=\|v\|_V\,\|T(x)\|_W\le C\,\|v\|_V.$$

Hemos demostrado la desigualdad $\|Tv\|_W\le C\,\|v\|_V$ para cada $v$ en $V\setminus\{0_V\}$. Esta desigualdad se cumple también para $v=0_V$. □

**4 Ejercicio.** Demostrar las siguientes relaciones lógicas entre las condiciones en la Proposición 3: (a)⇒(b), (f)⇒(g).

**5 Ejercicio.** Sean $V$, $W$ espacios normados complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Además, sea $a \in V$. Demostrar que $T$ es continua si, y sólo si, $T$ es continua en el punto $a$.

**6 Ejercicio.** Sean $V$, $W$ espacios normados complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Demostrar que $T$ es acotada si, y sólo si, para cada conjunto $P \subseteq V$ acotado en $V$, la imagen $T[P]$ es un conjunto acotado en $W$.

**7 Definición.** Sean $V$, $W$ espacios normados complejos. Denotamos por $\mathcal{B}(V, W)$ al conjunto de los operadores lineales acotados $V \to W$.

## La norma de una transformación lineal acotada

**8 Proposición.** *Sean $V$, $W$ espacios normados complejos, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Entonces los siguientes elementos de $[0, +\infty]$ son iguales entre si:*

$$N_1(T) \coloneqq \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V\le 1}} \|Tx\|_W, \qquad N_2(T) \coloneqq \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V=1}} \|Tx\|_W, \qquad N_3(T) \coloneqq \sup_{\substack{x\in V\\ x\neq 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V},$$

$$N_4(T) \coloneqq \inf\{C \in [0, +\infty]\colon\ \forall x \in V\ \ \|Tx\|_W \le C\|x\|_V\}.$$

*Más aún, el ínfimo en la definición de $N_4(T)$ se alcanza, esto es,*

$$\forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le N_4(T)\|x\|_V.$$

*Parte de demostración.* Pongamos

$$\mathcal{U} \coloneqq \big\{C \in [0, +\infty]\colon \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V\big\}.$$

Demostremos que el número $N_1(T)$ es el elemento mínimo del conjunto $\mathcal{U}$.

Notemos que la condición (g) en la Proposición 3 se puede escribir como $N_1(T) < +\infty$. Como vimos en la demostración de la implicación (g)$\Rightarrow$(a) en la Proposición 3,

$$\forall v \in V \qquad \|Tv\|_W \le N_1(T)\,\|v\|_V.$$

Esto significa que $N_1(T) \in \mathcal{U}$.

Ahora supongamos que $C \in \mathcal{U}$. Entonces para cada $x$ en $V$ con $\|x\|_V \le 1$ obtenemos $\|Tx\|_W \le C\,\|x\|_V \le C$. Luego $N_1(T) \le C$.

Mostremos que $N_2(T) \le N_1(T)$. Denotemos por $S_V$ a la esfera unitaria en el espacio $V$. Entonces

$$S_V = \big\{x \in V\colon\ \|x\|_V = 1\big\} \subseteq \{x \in V\colon\ \|x\|_V \le 1\} = \operatorname{cl}(B_V).$$

Luego

$$\big\{\|Tx\|_W\colon\ \|x\|_V = 1\big\} = N_W\big[T[S_V]\big] \subseteq N_W\big[T[\operatorname{cl}(B_V)]\big] = \big\{\|Tx\|_W\colon\ \|x\|_V \le 1\big\}$$

y

$$N_2(T) = \sup\big\{\|Tx\|_W\colon\ \|x\|_V = 1\big\} \le \sup\big\{\|Tx\|_W\colon\ \|x\|_V \le 1\big\} = N_1(T).$$

Mostremos que $N_1(T) \le N_2(T)$. Sea $x \in V$ tal que $0 < \|x\|_V \le 1$. Pongamos

$$u := \frac{1}{\|x\|_V}\,x.$$

Entonces $\|u\|_V = 1$ y $\|Tu\|_W \le N_2(T)$. Como $x = \|x\|_V\,u$,

$$\|Tx\|_W = \big\|T(\|v\|_V\,u)\big\|_W = \big\|\|v\|_V\,T(u)\big\|_W = \|v\|_V\,\|T(u)\|_W \le N_2(T)\,\|v\|_V \le N_2(T).$$

La desigualdad $\|Tx\|_W \le N_2(T)$ se cumple también para $x = 0_V$. Hemos demostrado que $N_1(T) \le N_2(T)$. $\square$

**9 Ejercicio.** Demostrar que $N_2(T) = N_3(T)$.

**10 Definición** (la norma de una transformación lineal acotada)**.** Sea $T \in \mathcal{B}(V,W)$. Entonces el número $N_1(T)$ se llama la *norma* de $T$ y se denota por $\|T\|$.