Ejemplos simples de transformaciones lineales acotadas

(un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko

http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

25 de marzo de 2022

Plan

Objetivos y prerrequisitos

Objetivo: conocer varios ejemplos de transformaciones lineales acotadas, calcular o acotar sus normas.

Prerrequisitos:

- Criterio de continuidad de una transformación lineal.
- Varias fórmulas equivalentes para la norma de una transformación lineal.

Criterio de continuidad de una transformación lineal (repaso)

Proposición

Sean V y W espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) T es acotada: $\quad \exists C \geq 0 \qquad \forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V.$

(b) T es Lipschitz continua.

(c) T es uniformemente continua.

(d) T es continua.

(e) T es continua en el punto 0_V.

(f) $T[B_V(0_V, 1)]$ es un conjunto acotado en W.

(g) $\sup\{\|Tx\|_W \colon \quad x \in V, \quad \|x\|_V \leq 1\} < +\infty.$

Terminología

Usamos como sinónimos los siguientes términos:

- transformación lineal continua,
- transformación lineal acotada,
- operador lineal continuo,
- operador lineal acotado.

Denotamos por $\mathcal{B}(V, W)$ el conjunto de las transformaciones lineales continuas $V \to W$.

La norma de una transformación lineal (repaso)

Proposición

Sean V y W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ una transf. lineal.

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V\le 1}} \|Tx\|_W, \quad N_2(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V=1}} \|Tx\|_W, \quad N_3(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ x\neq 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V},$$

$$N_4(T) := \inf\left\{C\in[0,+\infty]\colon\quad \forall x\in V\quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V\right\}.$$

Entonces $N_1(T) = N_2(T) = N_3(T) = N_4(T)$.

Más aún, el ínfimo en la definición de $N_4(T)$ se alcanza, esto es,

$$\forall x\in V\quad \|Tx\|_W \le N_4(T)\|x\|_V.$$

La norma de una transformación lineal continua (repaso)

Sean V, W espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(V, W)$.

La norma de una transformación lineal continua (repaso)

Sean V, W espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(V, W)$.

Definimos la norma de T como $N_1(T)$:

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W.$$

La norma de una transformación lineal continua (repaso)

Sean V, W espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(V, W)$.

Definimos la norma de T como $N_1(T)$:

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W .$$

Como T es continua, por el criterio de continuidad tenemos $\|T\| < +\infty$.

La norma de una transformación lineal continua (repaso)

Sean V, W espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(V, W)$.

Definimos la norma de T como $N_1(T)$:

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W.$$

Como T es continua, por el criterio de continuidad tenemos $\|T\| < +\infty$.

La propiedad principal de $\|T\|$:

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \|T\| \, \|x\|_V.$$

¿Cómo calcular la norma de una transformación lineal?

Ejercicio (una receta acotar $\|T\|$ por arriba).

Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal y sea $\alpha \geq 0$. Supongamos que

$$\forall v \in V \qquad \|Tv\|_W \leq \alpha \, \|v\|_V.$$

Mostrar que $\|T\| \leq \alpha$.

¿Cómo calcular la norma de una transformación lineal?

Ejercicio (una receta acotar $\|T\|$ por arriba).
Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal y sea $\alpha \geq 0$. Supongamos que

$$\forall v \in V \qquad \|Tv\|_W \leq \alpha \|v\|_V.$$

Mostrar que $\|T\| \leq \alpha$.

Ejercicio (una receta para acotar $\|T\|$ por abajo).
Sean $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $\beta > 0$ y $u \in V \setminus \{0_V\}$ tales que

$$\|Tu\|_W \geq \beta \|u\|_V.$$

Mostrar que $\|T\| \geq \beta$.

Plan

Ejemplo: el operador de multiplicación en ℓ^p

Ejercicio. Sea $a \in \ell^\infty$ y sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $M_a \colon \ell^p \to \ell^p$,

$$(M_a x)_k := a_k x_k \qquad (x \in \ell^p,\ \ k \in \mathbb{N}).$$

En otras palabras,

$$M_a x := (a_k x_k)_{k \in \mathbb{N}},$$

$$M_a \colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \ldots).$$

Calcular $\|M_a\|$.

Ejemplo: el operador de multiplicación en ℓ^p

Ejercicio. Sea $a \in \ell^\infty$ y sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $M_a \colon \ell^p \to \ell^p$,

$$(M_a x)_k := a_k x_k \qquad (x \in \ell^p,\ \ k \in \mathbb{N}).$$

En otras palabras,

$$M_a x := (a_k x_k)_{k \in \mathbb{N}},$$

$$M_a \colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \ldots).$$

Calcular $\|M_a\|$.

Sugerencias: acotar $\|M_a x\|_p$ por arriba, además calcular $M_a e_m$ y $\|M_a e_m\|_p$.

Operadores de desplazamiento en ℓ^p

Ejercicio. Definimos $L\colon \ell^p \to \ell^p$ y $R\colon \ell^p \to \ell^p$,

$$(Lx)_k := x_{k+1}, \qquad (Rx)_k := \begin{cases} x_{k-1}, & k \geq 2; \\ 0, & k = 1. \end{cases}$$

Calcular $\|L\|$ y $\|R\|$. Mostrar que $LR = I$, $RL \neq I$.

Plan

La norma de un operador $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_\infty)$

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y sean $V := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $W := (\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_\infty)$.
Denotamos por $\|A\|_{\text{oper},\infty}$ la norma del operador lineal $V \to W$ asociado a esta matriz:

$$\|A\|_{\text{oper},\infty} := \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0_n\}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

Pongamos

$$\beta := \max_{1\le j\le m} \sum_{k=1}^{n} |A_{j,k}|.$$

Demostrar que

$$\|A\|_{\text{oper},\infty} = \beta.$$

La norma de un operador $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_1)$

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y sean $V := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$, $W := (\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_1)$.
Denotamos por $\|A\|_{\mathrm{oper},1}$ la norma del operador lineal $V \to W$ asociado a esta matriz:

$$\|A\|_{\mathrm{oper},1} := \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0_n\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

Pongamos

$$\gamma := \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{m} |A_{j,k}|.$$

Demostrar que

$$\|A\|_{\mathrm{oper},1} = \gamma.$$

Desigualdad de Schur para acotar la norma de matrices

Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y sean $V := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$, $W := (\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_2)$.
Denotamos por $\|A\|$ la norma del operador lineal $V \to W$ asociado a esta matriz:

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0_n\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

Pongamos

$$\beta := \max_{1\le j\le m} \sum_{k=1}^{n} |A_{j,k}|, \qquad \gamma := \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{m} |A_{j,k}|.$$

Demostrar que

$$\|A\| \le \sqrt{\beta\,\gamma}.$$

Sugerencia: usar la desigualdad de Hölder.

La norma matricial asociada a la norma vectorial $\|\cdot\|_1$

Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Asociamos a la matriz A un operador lineal en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$. Calcular la norma de este operador:

$$\sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

Plan

Operador de la proyección canónica

Ejercicio. Sea $V := \mathbb{C}^2$ con la norma $\|\cdot\|_1$.
Consideramos el subespacio $W := \operatorname{lin}(a)$,

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sea $P\colon V \to V/W$,

$$P(x) := x + W.$$

Calcular $\|P\|$.

Sugerencia: dado un x en V, primero calcular $\|x + w\|_1$ para cada w en W, luego calcular $\|x + W\|_{V/W}$.

Operador de la proyección canónica

Ejercicio. En el espacio $c(\mathbb{N})$ consideramos el subespacio $c_0(\mathbb{N})$.

Sea $P\colon \mathbb{C} \to c(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$,

$$P(x) := x + c_0(\mathbb{N}).$$

Calcular $\|P\|$.

Sugerencia: calcular $\|x + c_0(\mathbb{N})\|$ para cada x en $c(\mathbb{N})$.