Transformaciones lineales acotadas.
La norma de una transformación lineal
(un tema de análisis funcional)

Dante Arroyo Sánchez, Sofía Cano Flores,
Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

26 de marzo de 2022

Objetivos

- Demostrar el criterio de continuidad de una transformación lineal.
- Demostrar la equivalencia de cuatro fórmulas para la norma de una transformación lineal.

Prerrequisitos

- Espacios normados, bolas en espacios normados.
- Transformaciones lineales en espacios vectoriales.
- El supremo y el ínfimo de un conjunto.
- La imagen de un conjunto bajo una función.
- El supremo de los valores de una función.

Transformaciones lineales

Sean V y W espacios vectoriales complejos.

Una función $T\colon V \to W$ se llama lineal, si es aditiva y homogénea:

- $\forall u, v \in V \qquad T(u+v) = T(u) + T(v)$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \forall u \in V \qquad T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Transformaciones lineales

Sean V y W espacios vectoriales complejos.

Una función $T\colon V \to W$ se llama lineal, si es aditiva y homogénea:

- $\forall u, v \in V \qquad T(u+v) = T(u) + T(v),$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \forall u \in V \qquad T(\lambda u) = \lambda T(u).$

Ejercicio (repaso). Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Demostrar que

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \forall a_1, \ldots, a_m \in V \qquad \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$$

$$T\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k T(a_k).$$

Terminología

Terminología: función lineal $=$ transformación lineal $=$ operador lineal.

Algunos autores dicen “operador lineal” solamente cuando $W = V$.

Imágenes de conjuntos dilatados y trasladados

Ejercicio.

Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

Sean $X, Y \subseteq V$, $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostrar que

$$T[\lambda X] = \lambda T[X],$$

$$T[a + X] = T(a) + T[X],$$

$$T[X + Y] = T[X] + T[Y].$$

Normas y bolas en el dominio y codominio

En lo que sigue, suponemos que V y W son espacios normados.

Normas y bolas en el dominio y codominio

En lo que sigue, suponemos que V y W son espacios normados.

Denotamos por $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$ las normas en estos espacios.

Normas y bolas en el dominio y codominio

En lo que sigue, suponemos que V y W son espacios normados.

Denotamos por $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$ las normas en estos espacios.

Denotamos por B_V y B_W las bolas unitarias abiertas en estos espacios:

$$B_V := \left\{x \in V\colon\ \|x\|_V < 1\right\}, \qquad B_W := \left\{y \in W\colon\ \|y\|_W < 1\right\}.$$

Normas y bolas en el dominio y codominio

En lo que sigue, suponemos que V y W son espacios normados.

Denotamos por $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$ las normas en estos espacios.

Denotamos por B_V y B_W las bolas unitarias abiertas en estos espacios:

$$B_V := \left\{x \in V\colon\ \|x\|_V < 1\right\}, \qquad B_W := \left\{y \in W\colon\ \|y\|_W < 1\right\}.$$

Las bolas más generales se expresan a través de B_V y B_W:

$$B_V(a,r) = a + r\,B_V, \qquad B_W(b,r) = b + r\,B_W.$$

Topologías en el dominio y codominio

Denotamos por τ_V y τ_W las topologías inducidas por las normas.

Topologías en el dominio y codominio

Denotamos por τ_V y τ_W las topologías inducidas por las normas.

Sabemos que

$$A \in \tau_V \qquad \iff$$

Topologías en el dominio y codominio

Denotamos por τ_V y τ_W las topologías inducidas por las normas.

Sabemos que

$$A \in \tau_V \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \quad \exists r > 0 \quad a + r\,B_V \subseteq A.$$

Topologías en el dominio y codominio

Denotamos por τ_V y τ_W las topologías inducidas por las normas.

Sabemos que

$$A \in \tau_V \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \quad \exists r > 0 \quad a + r\,B_V \subseteq A.$$

Dado a en V, pongamos

$$\tau_V(a) := \{A \in \tau_V : \ a \in A\}.$$

Transformaciones lineales acotadas

Sean V y W espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

Transformaciones lineales acotadas

Sean V y W espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

Se dice que T es acotada si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V.$$

Criterio de continuidad de una transformación lineal

Proposición

Sean V y W espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) T es acotada: $\exists C \ge 0 \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\,\|x\|_V$.

(b) T es Lipschitz continua: $\exists C \ge 0 \quad \forall u, v \in V \quad \|Tu - Tv\|_W \le \|u - v\|_V$.

(c) T es uniformemente continua.

(d) T es continua.

(e) T es continua en el punto 0_V.

(f) $T[B_V]$ es un conjunto acotado en W.

(g) $\sup\{\|Tx\|_W \colon\ x \in V,\ \|x\|_V \le 1\} < +\infty$.

Demostración

Ejercicio.

Demostrar las implicaciones (b)⇒(c), (c)⇒(d), (d)⇒(e), (f)⇒(g), (g)⇒(a).

(a) $\exists C \geq 0 \qquad \forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V.$

(b) T es Lipschitz continua.

(c) T es uniformemente continua.

(d) T es continua.

(e) T es continua en el punto 0_V.

(f) $T[B_V]$ es un conjunto acotado en W.

(g) $\sup\{\|Tx\|_W\colon \quad x \in V, \quad \|x\|_V \leq 1\} < +\infty.$

Demostración (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $C \geq 0$ y

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V.$$

Demostración (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $C \geq 0$ y

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V.$$

Mostremos que T es Lipschitz continua.

Demostración (a)⇒(b)

Supongamos que $C \ge 0$ y

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \le C\,\|x\|_V.$$

Mostremos que T es Lipschitz continua.

Seam $u, v \in V$.

Demostración (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $C \geq 0$ y

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V.$$

Mostremos que T es Lipschitz continua.

Seam $u, v \in V$. Entonces

$$\|Tu - Tv\|_W$$

Demostración (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $C \geq 0$ y

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V.$$

Mostremos que T es Lipschitz continua.

Seam $u, v \in V$. Entonces

$$\|Tu - Tv\|_W =$$

Demostración (a)⇒(b)

Supongamos que $C \geq 0$ y

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V.$$

Mostremos que T es Lipschitz continua.

Seam $u, v \in V$. Entonces

$$\|Tu - Tv\|_W = \|T(u - v)\|_W$$

Demostración (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $C \geq 0$ y

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V.$$

Mostremos que T es Lipschitz continua.

Seam $u, v \in V$. Entonces

$$\|Tu - Tv\|_W = \|T(u-v)\|_W \leq$$

Demostración (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $C \geq 0$ y

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V.$$

Mostremos que T es Lipschitz continua.

Seam $u, v \in V$. Entonces

$$\|Tu - Tv\|_W = \|T(u-v)\|_W \leq C\,\|u-v\|_V.$$

Demostración (a)⇒(b)

Supongamos que $C \geq 0$ y

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V.$$

Mostremos que T es Lipschitz continua.

Seam $u, v \in V$. Entonces

$$\|Tu - Tv\|_W = \|T(u-v)\|_W \leq C\,\|u-v\|_V.$$

Ejercicio. Demostrar de manera directa que (b) implica (a).

Demostración (e)$\Rightarrow$(f)

Supongamos que T es continua en el punto 0_V.

Demostración (e)$\Rightarrow$(f)

Supongamos que T es continua en el punto 0_V.

Mostremos que el conjunto $T[B_V]$ es acotado en W.

Demostración (e)$\Rightarrow$(f)

Supongamos que T es continua en el punto 0_V.

Mostremos que el conjunto $T[B_V]$ es acotado en W.

Notemos que $0_W = T(0_V)$ y $B_W \in \tau_W(0_W)$.

Demostración (e)$\Rightarrow$(f)

Supongamos que T es continua en el punto 0_V.

Mostremos que el conjunto $T[B_V]$ es acotado en W.

Notemos que $0_W = T(0_V)$ y $B_W \in \tau_W(0_W)$.

Como T es continua, existe $r > 0$ tal que

Demostración (e)$\Rightarrow$(f)

Supongamos que T es continua en el punto 0_V.

Mostremos que el conjunto $T[B_V]$ es acotado en W.

Notemos que $0_W = T(0_V)$ y $B_W \in \tau_W(0_W)$.

Como T es continua, existe $r > 0$ tal que $T[r\,B_V] \subseteq B_W$.

Demostración (e)$\Rightarrow$(f)

Supongamos que T es continua en el punto 0_V.

Mostremos que el conjunto $T[B_V]$ es acotado en W.

Notemos que $0_W = T(0_V)$ y $B_W \in \tau_W(0_W)$.

Como T es continua, existe $r > 0$ tal que $T[r\, B_V] \subseteq B_W$.

Luego $\quad r\, T[B_V] \subseteq B_W$.

Demostración (e)$\Rightarrow$(f)

Supongamos que T es continua en el punto 0_V.

Mostremos que el conjunto $T[B_V]$ es acotado en W.

Notemos que $0_W = T(0_V)$ y $B_W \in \tau_W(0_W)$.

Como T es continua, existe $r > 0$ tal que $T[r\, B_V] \subseteq B_W$.

Luego $\quad r\, T[B_V] \subseteq B_W$.

Obtenemos

$$T[B_V]$$

Demostración (e)$\Rightarrow$(f)

Supongamos que T es continua en el punto 0_V.

Mostremos que el conjunto $T[B_V]$ es acotado en W.

Notemos que $0_W = T(0_V)$ y $B_W \in \tau_W(0_W)$.

Como T es continua, existe $r > 0$ tal que $T[r\,B_V] \subseteq B_W$.

Luego $\quad r\,T[B_V] \subseteq B_W$.

Obtenemos

$$T[B_V] =$$

Demostración (e)$\Rightarrow$(f)

Supongamos que T es continua en el punto 0_V.

Mostremos que el conjunto $T[B_V]$ es acotado en W.

Notemos que $0_W = T(0_V)$ y $B_W \in \tau_W(0_W)$.

Como T es continua, existe $r > 0$ tal que $T[r\,B_V] \subseteq B_W$.

Luego $\quad r\,T[B_V] \subseteq B_W$.

Obtenemos
$$T[B_V] = \frac{1}{r}\,(r\,T[B_V])$$

Demostración (e)$\Rightarrow$(f)

Supongamos que T es continua en el punto 0_V.

Mostremos que el conjunto $T[B_V]$ es acotado en W.

Notemos que $0_W = T(0_V)$ y $B_W \in \tau_W(0_W)$.

Como T es continua, existe $r > 0$ tal que $T[r\,B_V] \subseteq B_W$.

Luego $\quad r\,T[B_V] \subseteq B_W$.

Obtenemos

$$T[B_V] = \frac{1}{r}\,(r\,T[B_V]) \subseteq$$

Demostración (e)$\Rightarrow$(f)

Supongamos que T es continua en el punto 0_V.

Mostremos que el conjunto $T[B_V]$ es acotado en W.

Notemos que $0_W = T(0_V)$ y $B_W \in \tau_W(0_W)$.

Como T es continua, existe $r > 0$ tal que $T[r\,B_V] \subseteq B_W$.

Luego $\quad r\,T[B_V] \subseteq B_W$.

Obtenemos

$$T[B_V] = \frac{1}{r}\,(r\,T[B_V]) \;\subseteq\; \frac{1}{r}\,B_W.$$

Demostración (e)$\Rightarrow$(f)

Supongamos que T es continua en el punto 0_V.

Mostremos que el conjunto $T[B_V]$ es acotado en W.

Notemos que $0_W = T(0_V)$ y $B_W \in \tau_W(0_W)$.

Como T es continua, existe $r > 0$ tal que $T[r\, B_V] \subseteq B_W$.

Luego $\quad r\, T[B_V] \subseteq B_W$.

Obtenemos

$$T[B_V] = \frac{1}{r}\,(r\, T[B_V]) \subseteq \frac{1}{r}\, B_W.$$

Como la bola $\frac{1}{r}\, B_W$ es acotada, su subconjunto $T[B_V]$ también es acotado.

Terminología

Usamos como sinónimos los siguientes términos:

- transformación lineal continua,
- transformación lineal acotada,
- operador lineal continuo,
- operador lineal acotado.

Denotamos por $\mathcal{B}(V, W)$ el conjunto de las transformaciones lineales continuas $V \to W$.

Otras condiciones equivalentes

Sean V, W espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

Otras condiciones equivalentes

Sean V, W espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

Ejercicio.

Sea $a \in V$. Demostrar que T es continua $\iff$ T es continua en a.

Otras condiciones equivalentes

Sean V, W espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

Ejercicio.

Sea $a \in V$. Demostrar que T es continua $\iff$ T es continua en a.

Ejercicio.

Demostrar que T es continua $\iff$ para cada $A \subseteq V$ acotado, $T[A]$ es acotado.

Cuatro fórmulas equivalentes para la norma de una transformación lineal

Proposición

Sean V y W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ lineal.

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W, \quad N_2(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \|Tx\|_W, \quad N_3(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V},$$

$$N_4(T) := \inf \Big\{ C \in [0, +\infty] \colon \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \Big\}.$$

Entonces $N_1(T) = N_2(T) = N_3(T) = N_4(T)$.

Más aún, el ínfimo en la definición de $N_4(T)$ se alcanza, esto es,

$$\forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le N_4(T)\|x\|_V.$$

Demostración: $N_2 \leq N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V: \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V: \quad \|x\|_V \leq 1\}.$$

Demostración: $N_2 \le N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0, +\infty)$, $\quad f(x) := \|T(x)\|_W$.

Demostración: $N_2 \le N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0, +\infty)$, $\quad f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

Demostración: $N_2 \leq N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V \leq 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0, +\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T)$$

Demostración: $N_2 \leq N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V \leq 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0, +\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) =$$

Demostración: $N_2 \le N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0, +\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W$$

Demostración: $N_2 \le N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0, +\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W =$$

Demostración: $N_2 \leq N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V \leq 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0, +\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) = \sup_{\substack{x\in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[X_V]),$$

Demostración: $N_2 \le N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V : \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V : \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0, +\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[X_V]),$$

$$N_2(T)$$

Demostración: $N_2 \le N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0, +\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[X_V]),$$

$$N_2(T) =$$

Demostración: $N_2 \le N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0, +\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[X_V]),$$

$$N_2(T) = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \|Tx\|_W$$

Demostración: $N_2 \le N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V:\quad \|x\|_V = 1\},\qquad X_V := \{x \in V:\quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0,+\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) = \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[X_V]),$$

$$N_2(T) = \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V = 1}} \|Tx\|_W =$$

Demostración: $N_2 \le N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0, +\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[X_V]),$$

$$N_2(T) = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[S_V]).$$

Demostración: $N_2 \le N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V \colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V \colon \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Definimos $f \colon V \to [0, +\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[X_V]),$$

$$N_2(T) = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[S_V]).$$

Como $S_V \subseteq X_V$,

Demostración: $N_2 \leq N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V\colon \quad \|x\|_V \leq 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0, +\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) = \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V\leq 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[X_V]),$$

$$N_2(T) = \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V=1}} \|Tx\|_W = \sup(f[S_V]).$$

Como $S_V \subseteq X_V$, obtenemos $f[S_V] \subseteq f[X_V]$

Demostración: $N_2 \le N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por X_V la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V : \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad X_V := \{x \in V : \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Definimos $f : V \to [0, +\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[X_V]),$$

$$N_2(T) = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[S_V]).$$

Como $S_V \subseteq X_V$, obtenemos $f[S_V] \subseteq f[X_V]$ y $N_2(T) \le N_1(T)$.

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \left\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \right\}.$$

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $x \in V$. Si $x \neq 0_V$, entonces pongamos

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \left\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V \right\}.$$

Sea $x \in V$. Si $x \neq 0_V$, entonces pongamos $\quad u := \frac{1}{\|x\|_V} x.$

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $x \in V$. Si $x \neq 0_V$, entonces pongamos $\quad u := \frac{1}{\|x\|_V} x.$

Luego $\|u\|_V = 1$,

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C \|x\|_V \Big\}.$$

Sea $x \in V$. Si $x \neq 0_V$, entonces pongamos $\quad u := \frac{1}{\|x\|_V}\, x.$

Luego $\|u\|_V = 1, \quad x = \|x\|_V\, u$

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C \|x\|_V \Big\}.$$

Sea $x \in V$. Si $x \neq 0_V$, entonces pongamos $\quad u := \frac{1}{\|x\|_V} x.$

Luego $\|u\|_V = 1, \quad x = \|x\|_V \, u \quad$ y

$$\|Tx\|_W$$

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty]: \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $x \in V$. Si $x \neq 0_V$, entonces pongamos $\quad u := \frac{1}{\|x\|_V}\, x.$

Luego $\|u\|_V = 1, \quad x = \|x\|_V\, u \quad$ y

$$\|Tx\|_W \ =$$

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $x \in V$. Si $x \ne 0_V$, entonces pongamos $\quad u := \frac{1}{\|x\|_V}\, x.$

Luego $\|u\|_V = 1, \quad x = \|x\|_V\, u \quad$ y

$$\|Tx\|_W \;=\; \|x\|_V\, \|Tu\|_W$$

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty]\colon \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $x \in V$. Si $x \neq 0_V$, entonces pongamos $\quad u := \frac{1}{\|x\|_V}\, x.$

Luego $\|u\|_V = 1, \quad x = \|x\|_V\, u \quad$ y

$$\|Tx\|_W \;=\; \|x\|_V\, \|Tu\|_W \;\le$$

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $x \in V$. Si $x \neq 0_V$, entonces pongamos $\quad u := \frac{1}{\|x\|_V}\, x.$

Luego $\|u\|_V = 1, \quad x = \|x\|_V\, u \quad$ y

$$\|Tx\|_W \;=\; \|x\|_V\, \|Tu\|_W \;\le\; N_1(T)\, \|x\|_V.$$

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C \|x\|_V \Big\}.$$

Sea $x \in V$. Si $x \neq 0_V$, entonces pongamos $\quad u := \frac{1}{\|x\|_V} x.$

Luego $\|u\|_V = 1, \quad x = \|x\|_V \, u \quad$ y

$$\|Tx\|_W \; = \; \|x\|_V \, \|Tu\|_W \; \le \; N_1(T) \, \|x\|_V.$$

Para $x = 0_V$ tenemos

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $x \in V$. Si $x \neq 0_V$, entonces pongamos $\quad u := \frac{1}{\|x\|_V}\, x.$

Luego $\|u\|_V = 1, \quad x = \|x\|_V\, u \quad$ y

$$\|Tx\|_W \;=\; \|x\|_V\, \|Tu\|_W \;\le\; N_1(T)\, \|x\|_V.$$

Para $x = 0_V$ tenemos $\quad \|Tx\|_W = 0 = N_1(T)\, \|x\|_V.$

Demostración: $N_1(T) \in M$

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $x \in V$. Si $x \neq 0_V$, entonces pongamos $\quad u := \frac{1}{\|x\|_V} x$.

Luego $\|u\|_V = 1, \quad x = \|x\|_V\, u \quad$ y

$$\|Tx\|_W \;=\; \|x\|_V \, \|Tu\|_W \;\le\; N_1(T)\, \|x\|_V.$$

Para $x = 0_V$ tenemos $\quad \|Tx\|_W = 0 = N_1(T)\, \|x\|_V$.

Hemos mostrado que $N_1(T) \in M$.

Demostración que $N_1(T)$ es una cota inferior de M

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \left\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \right\}.$$

Demostración que $N_1(T)$ es una cota inferior de M

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] \colon \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $C \in M$.

Demostración que $N_1(T)$ es una cota inferior de M

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $C \in M$.

Si $x \in V$ y $\|x\|_V \leq 1$, entonces

$$\|Tx\|_W$$

Demostración que $N_1(T)$ es una cota inferior de M

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $C \in M$.

Si $x \in V$ y $\|x\|_V \le 1$, entonces

$$\|Tx\|_W \le$$

Demostración que $N_1(T)$ es una cota inferior de M

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $C \in M$.

Si $x \in V$ y $\|x\|_V \leq 1$, entonces

$$\|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V$$

Demostración que $N_1(T)$ es una cota inferior de M

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \left\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \right\}.$$

Sea $C \in M$.

Si $x \in V$ y $\|x\|_V \le 1$, entonces

$$\|Tx\|_W \le C\,\|x\|_V \le$$

Demostración que $N_1(T)$ es una cota inferior de M

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C \|x\|_V \Big\}.$$

Sea $C \in M$.

Si $x \in V$ y $\|x\|_V \le 1$, entonces

$$\|Tx\|_W \le C\,\|x\|_V \le C.$$

Por lo tanto,

Demostración que $N_1(T)$ es una cota inferior de M

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \left\{C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V\right\}.$$

Sea $C \in M$.

Si $x \in V$ y $\|x\|_V \leq 1$, entonces

$$\|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V \leq C.$$

Por lo tanto, $N_1(T) \leq C$.

Demostración que $N_1(T)$ es una cota inferior de M

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V\le 1}} \|Tx\|_W,$$

$$M := \Big\{ C \in [0,+\infty]\colon \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \Big\}.$$

Sea $C \in M$.

Si $x \in V$ y $\|x\|_V \le 1$, entonces

$$\|Tx\|_W \le C\,\|x\|_V \le C.$$

Por lo tanto, $N_1(T) \le C$.

Hemos mostrado que $N_1(T)$ es el mínimo de M. Por consecuencia, $N_1(T) = N_4(T)$.

Ejercicio.

Completar la demostración. Por ejemplo, demostar que

$$N_1(T) \leq N_2(T), \qquad N_2(T) \leq N_3(T), \qquad N_3(T) \leq N_2(T).$$

La norma de una transformación lineal continua

Dada una transformación lineal continua $T\colon V \to W$, pongamos

$$\|T\| := N_1(T).$$

También se usa la notación $\|T\|_{W \leftarrow V}$.

El papel principal que hace $\|T\|$

Corolario

Sean V y W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$,
y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal continua. Entonces

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \|T\| \, \|x\|_V.$$

El papel principal que hace $\|T\|$

Corolario

Sean V y W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$,
y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal continua. Entonces

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \|T\|\,\|x\|_V.$$

Ejercicio.

- Repasar la demostración que ya hicimos: $\forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq N_1(T)\,\|x\|_V$.
- Demostrar de manera directa que $\forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq N_2(T)\,\|x\|_V$.
- Demostrar de manera directa que $\forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq N_3(T)\,\|x\|_V$.

Demostración directa que $\inf(M) \in M$

Ejercicio. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y sean

$$M := \Big\{ C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \Big\}, \qquad N_4(T) := \inf(M).$$

Demostrar de manera directa que $N_4(T) \in M$.

Demostración directa que $\inf(M) \in M$

Ejercicio. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal y sean

$$M := \Big\{ C \in [0,+\infty] \colon \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V \Big\}, \qquad N_4(T) := \inf(M).$$

Demostrar de manera directa que $N_4(T) \in M$.

Indicación. Un camino es elegir una sucesión $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = N_4(T)$. Notar que

$$\forall x \in V \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \|Tx\|_W \le \alpha_k \|x\|_V.$$

Para x fijo, pasar al límite cuando $k \to \infty$.

El caso $V = \{0_V\}$

En la proposición anterior hemos excluido el caso $V = \{0_V\}$.

El caso $V = \{0_V\}$

En la proposición anterior hemos excluido el caso $V = \{0_V\}$.

Si $V = \{0_V\}$, entonces $S_V =$

El caso $V = \{0_V\}$

En la proposición anterior hemos excluido el caso $V = \{0_V\}$.

Si $V = \{0_V\}$, entonces $S_V = \emptyset$ y

$$\{\|Tx\|_W : \quad x \in S_V\} = \emptyset.$$

El caso $V = \{0_V\}$

En la proposición anterior hemos excluido el caso $V = \{0_V\}$.

Si $V = \{0_V\}$, entonces $S_V = \emptyset$ y

$$\{\|Tx\|_W : \quad x \in S_V\} = \emptyset.$$

Por el convenio general en $[-\infty, +\infty]$, $\sup(\emptyset) = -\infty$.

El caso $V = \{0_V\}$

En la proposición anterior hemos excluido el caso $V = \{0_V\}$.

Si $V = \{0_V\}$, entonces $S_V = \emptyset$ y

$$\{\|Tx\|_W : \quad x \in S_V\} = \emptyset.$$

Por el convenio general en $[-\infty, +\infty]$, $\sup(\emptyset) = -\infty$.

Sin embargo, $\{\|Tx\|_W : \quad x \in S_V\}$ se puede considerar como subconjunto de $[0, +\infty]$.

El caso $V = \{0_V\}$

En la proposición anterior hemos excluido el caso $V = \{0_V\}$.

Si $V = \{0_V\}$, entonces $S_V = \emptyset$ y

$$\{\|Tx\|_W : \quad x \in S_V\} = \emptyset.$$

Por el convenio general en $[-\infty, +\infty]$, $\sup(\emptyset) = -\infty$.

Sin embargo, $\{\|Tx\|_W : \quad x \in S_V\}$ se puede considerar como subconjunto de $[0, +\infty]$.

Cuando trabajamos con subconjuntos de $[0, +\infty]$, podemos poner $\sup(\emptyset) = 0$.

¿Cómo calcular la norma de una transformación lineal?

Ejercicio (una receta acotar $\|T\|$ por arriba).

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y sea $\alpha \geq 0$. Supongamos que

$$\forall v \in V \qquad \|Tv\|_W \leq \alpha \|v\|_V.$$

Mostrar que $T \in \mathcal{B}(V, W)$ y $\|T\| \leq \alpha$.

¿Cómo calcular la norma de una transformación lineal?

Ejercicio (una receta acotar $\|T\|$ por arriba).
Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal y sea $\alpha \geq 0$. Supongamos que

$$\forall v \in V \qquad \|Tv\|_W \leq \alpha \, \|v\|_V.$$

Mostrar que $T \in \mathcal{B}(V, W)$ y $\|T\| \leq \alpha$.

Ejercicio (una receta para acotar $\|T\|$ por abajo).
Sean $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $\beta > 0$ y $u \in V \setminus \{0_V\}$ tales que

$$\|Tu\|_W \geq \beta \, \|u\|_V.$$

Mostrar que $\|T\| \geq \beta$.