Operadores lineales acotados.
La norma de un operador lineal

Objetivos. Estudiar el concepto del operador lineal acotado y de la norma del operador lineal. Demostrar la equivalencia de varias definiciones.

Prerrequisitos. Operadores lineales, bolas en espacios normados, el supremo y el ínfimo.

1 Proposición. *Sean V, W espacios normados complejos y sea $A\colon V \to W$ una función lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es Lipschitz continua;

(b) A es uniformemente continua;

(c) A es continua;

(d) A es continua en el punto 0_V;

(e) la imagen de la bola unitaria $B_V(0,1)$ bajo el operador A es un conjunto acotado en W;

(f) $\sup\limits_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V\le 1}} \|Ax\|_W < +\infty$;

(g) existe $C \ge 0$ tal que para cada x en V

$$\|Ax\|_W \le C\,\|x\|_V.$$

2 Proposición. *Sean V, W espacios normados complejos, $V \ne \{0_V\}$, y sea $A\colon V \to W$ una función lineal. Entonces los siguientes elementos de $[0,+\infty]$ son iguales entre si:*

$$N_1(A) \coloneqq \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V\le 1}} \|Ax\|_W, \qquad N_2(A) \coloneqq \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V= 1}} \|Ax\|_W, \qquad N_3(A) \coloneqq \sup_{\substack{x\in V\\ x\ne 0_V}} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V},$$

$$N_4(A) \coloneqq \inf\{C\in[0,+\infty]\colon\ \forall x\in V\ \ \|Ax\|_W \le C\|x\|_V\}.$$

Más aún, el ínfimo en la definición de $N_4(A)$ se alcanza, esto es,

$$\forall x\in V \quad \|Ax\|_W \le N_4(A)\|x\|_V.$$

El operador lineal A es acotado si, y solo si, $N_1(A) < +\infty$.

3 Definición. Sean V, W espacios normados complejos. Denotamos por $\mathcal{B}(V, W)$ al conjunto de los operadores lineales acotados $V \to W$.