

# Funcionales lineales acotados (un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko

<http://esfm.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional (México)  
Escuela Superior de Física y Matemáticas

12 de abril de 2022

- 1 Introducción y definición
- 2 Hipersubespacios
- 3 ¿Cuándo  $\ker(f) = \ker(g)$ ?
- 4  $f$  es acotado  $\iff \ker(f)$  es cerrado

# Plan

- 1 Introducción y definición
- 2 Hipersubespacios
- 3 ¿Cuándo  $\ker(f) = \ker(g)$ ?
- 4  $f$  es acotado  $\iff \ker(f)$  es cerrado

# Objetivos

- Dado un espacio normado complejo  $V$ ,  
repassar la definición del funcional lineal acotado  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ .
- Estudiar el concepto de hipersubespacio.  
Demostrar que si  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  es un funcional lineal,  
entonces  $\ker(f)$  es un hipersubespacio.
- Determinar, cuándo  $\ker(f) = \ker(g)$ .
- Demostrar que  $f$  es acotado  $\iff \ker(f)$  es cerrado.

# Prerrequisitos

- El criterio de continuidad de una transformación lineal.
- Varias fórmulas equivalentes para la norma de una transformación lineal.
- El espacio cociente de un espacio vectorial sobre un subespacio.
- El espacio cociente de un espacio normado sobre un subespacio cerrado.

En las clases pasadas hemos considerado el concepto de las transformaciones lineales acotadas  $V \rightarrow W$ , donde  $V$  y  $W$  son espacios normados complejos.

Podemos aplicar estos conceptos y resultados al caso particular, cuando

$$W = \mathbb{C}.$$

$\mathbb{C}$  se considera como un espacio normado.

La norma en  $\mathbb{C}$  se define como el valor absoluto:

$$|z| := \sqrt{z \bar{z}}, \quad |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

# Criterio de continuidad de un funcional lineal

## Proposición

Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a)  $f$  es **acotado**:  $\exists C \geq 0 \quad \forall x \in V \quad |f(x)| \leq C \|x\|_V$ .
- (b)  $f$  es Lipschitz continuo.
- (c)  $f$  es uniformemente continuo.
- (d)  $f$  es continuo.
- (e)  $f$  es continuo en el punto  $0_V$ .
- (f)  $\sup \{|f(x)|: x \in V, \|x\|_V < 1\} < +\infty$ , i.e.,  $f[B_V]$  es acotado.
- (g)  $\sup \{|f(x)|: x \in V, \|x\|_V \leq 1\} < +\infty$ , i.e.,  $f[\text{clos}(B_V)]$  es acotado.

# La norma de un funcional lineal

## Proposición

Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal.

$$N_1(f) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} |f(x)|, \quad N_2(f) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} |f(x)|, \quad N_3(f) := \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0_V}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_V},$$

$$N_4(f) := \inf\{C \in [0, +\infty]: \forall x \in V \quad |f(x)| \leq C\|x\|_V\}.$$

Entonces  $N_1(f) = N_2(f) = N_3(f) = N_4(f)$ .

Más aún, el ínfimo en la definición de  $N_4(f)$  se alcanza, esto es,

$$\forall x \in V \quad |f(x)| \leq N_4(f)\|x\|_V.$$

# Funcionales lineales acotados

Sea  $V$  un espacio normado complejo.

# Funcionales lineales acotados

Sea  $V$  un espacio normado complejo.

Un funcional lineal  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  se llama **acotado**, si existe  $C \geq 0$  tal que

$$\forall x \in V \quad |f(x)| \leq C\|x\|_V.$$

# Funcionales lineales acotados

Sea  $V$  un espacio normado complejo.

Un funcional lineal  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  se llama **acotado**, si existe  $C \geq 0$  tal que

$$\forall x \in V \quad |f(x)| \leq C\|x\|_V.$$

La **norma de un funcional lineal acotado**  $f$  se define como

$$\|f\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} |f(x)|.$$

Otra notación:  $\|f\|_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ ,  $\|f\|_{\mathbb{C} \leftarrow V}$ ,  $\|f\|_{V^*}$ .

# Funcionales lineales acotados

Sea  $V$  un espacio normado complejo.

Un funcional lineal  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  se llama **acotado**, si existe  $C \geq 0$  tal que

$$\forall x \in V \quad |f(x)| \leq C\|x\|_V.$$

La **norma de un funcional lineal acotado**  $f$  se define como

$$\|f\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} |f(x)|.$$

Otra notación:  $\|f\|_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ ,  $\|f\|_{\mathbb{C} \leftarrow V}$ ,  $\|f\|_{V^*}$ .

Si  $f$  es acotado, entonces  $\forall x \in V \quad |f(x)| \leq \|f\| \|x\|_V.$

# El espacio dual de un espacio normado

Sea  $V$  un espacio normado complejo.

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Algunos autores denotan  $\mathcal{B}(V, \mathbb{C})$  por  $V'$ .

# El espacio dual de un espacio normado

Sea  $V$  un espacio normado complejo.

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Algunos autores denotan  $\mathcal{B}(V, \mathbb{C})$  por  $V'$ .

Operaciones lineales en  $V^*$ :

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad (x \in V).$$

# El espacio dual de un espacio normado

Sea  $V$  un espacio normado complejo.

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Algunos autores denotan  $\mathcal{B}(V, \mathbb{C})$  por  $V'$ .

Operaciones lineales en  $V^*$ :

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad (x \in V).$$

## Proposición

Sea  $V$  un espacio normado complejo. Entonces  $V^*$  es de Banach.

# El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

## Proposición

Sea  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal. Entonces  $f$  es acotado.

# El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

## Proposición

Sea  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal. Entonces  $f$  es acotado.

**Demostración.** Sea

$$M := \left( \sum_{k=1}^n |f(e_k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Entonces para cada  $x$  en  $\mathbb{C}^n$  tenemos

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) \right| \leq M \|x\|_2.$$

# Sobre isomorfismos de espacios normados de dimensión finita

## Ejercicio.

Sea  $V$  un espacio normado complejo de dimensión  $n$   
y sea  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$  un isomorfismo.

Demostrar que  $T$  es un homeomorfismo.

## Sobre isomorfismos de espacios normados de dimensión finita

### Ejercicio.

Sea  $V$  un espacio normado complejo de dimensión  $n$   
y sea  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$  un isomorfismo.

Demostrar que  $T$  es un homeomorfismo.

### Sugerencia.

Usar el hecho que todas las normas en  $\mathbb{C}^n$  son equivalentes entre si.

# El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

## Proposición

Sea  $V$  un espacio normado de dimensión finita y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal. Entonces  $f$  es acotado.

# El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

## Proposición

Sea  $V$  un espacio normado de dimensión finita y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal. Entonces  $f$  es acotado.

**Idea de demostración.**

## El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

### Proposición

Sea  $V$  un espacio normado de dimensión finita y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal. Entonces  $f$  es acotado.

### Idea de demostración.

Construir un isomorfismo  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$ .

# El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

## Proposición

Sea  $V$  un espacio normado de dimensión finita y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal. Entonces  $f$  es acotado.

### Idea de demostración.

Construir un isomorfismo  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$ .

Demostrar que  $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, V)$  y  $T^{-1} \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C}^n)$ .

## El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

### Proposición

Sea  $V$  un espacio normado de dimensión finita y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal. Entonces  $f$  es acotado.

### Idea de demostración.

Construir un isomorfismo  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$ .

Demostrar que  $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, V)$  y  $T^{-1} \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C}^n)$ .

Como  $f \circ T$  es un funcional lineal  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \circ T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ .

# El caso de dimensión finita: los funcionales lineales son acotados

## Proposición

Sea  $V$  un espacio normado de dimensión finita y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal. Entonces  $f$  es acotado.

### Idea de demostración.

Construir un isomorfismo  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$ .

Demostrar que  $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, V)$  y  $T^{-1} \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C}^n)$ .

Como  $f \circ T$  es un funcional lineal  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \circ T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ .

Como  $T^{-1} \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C}^n)$ , tenemos  $f = (f \circ T) \circ T^{-1} \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ .

# Plan

- 1 Introducción y definición
- 2 Hipersubespacios**
- 3 ¿Cuándo  $\ker(f) = \ker(g)$ ?
- 4  $f$  es acotado  $\iff \ker(f)$  es cerrado

# El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

En esta sección suponemos que  $V$  es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio  $W$  de  $V$ , se puede definir el espacio cociente  $V/W$ .

- $a \stackrel{W}{\equiv} b \iff a - b \in W$ , es una relación de equivalencia.

# El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

En esta sección suponemos que  $V$  es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio  $W$  de  $V$ , se puede definir el espacio cociente  $V/W$ .

- $a \stackrel{W}{\equiv} b \iff a - b \in W$ , es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V : b \stackrel{W}{\equiv} a\} = a + W$ .

# El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

En esta sección suponemos que  $V$  es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio  $W$  de  $V$ , se puede definir el espacio cociente  $V/W$ .

- $a \stackrel{W}{\equiv} b \iff a - b \in W$ , es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V : b \stackrel{W}{\equiv} a\} = a + W$ .
- $V/W := \{a + W : a \in V\}$ .

# El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

En esta sección suponemos que  $V$  es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio  $W$  de  $V$ , se puede definir el espacio cociente  $V/W$ .

- $a \stackrel{W}{\equiv} b \iff a - b \in W$ , es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V : b \stackrel{W}{\equiv} a\} = a + W$ .
- $V/W := \{a + W : a \in V\}$ .
- $(a + W) + (b + W) := (a + b) + W$ ,  $\lambda \stackrel{V/W}{\cdot} (a + W) := (\lambda a) + W$ .

# El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

En esta sección suponemos que  $V$  es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio  $W$  de  $V$ , se puede definir el espacio cociente  $V/W$ .

- $a \stackrel{W}{\equiv} b \iff a - b \in W$ , es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V : b \stackrel{W}{\equiv} a\} = a + W$ .
- $V/W := \{a + W : a \in V\}$ .
- $(a + W) + (b + W) := (a + b) + W$ ,  $\lambda \stackrel{V/W}{\cdot} (a + W) := (\lambda a) + W$ .
- $V/W$  es un espacio vectorial complejo.

# El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

En esta sección suponemos que  $V$  es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio  $W$  de  $V$ , se puede definir el espacio cociente  $V/W$ .

- $a \stackrel{W}{\equiv} b \iff a - b \in W$ , es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V : b \stackrel{W}{\equiv} a\} = a + W$ .
- $V/W := \{a + W : a \in V\}$ .
- $(a + W) + (b + W) := (a + b) + W$ ,  $\lambda \stackrel{V/W}{\cdot} (a + W) := (\lambda a) + W$ .
- $V/W$  es un espacio vectorial complejo.
- El vector cero de  $V/W$  es  $W$ .

# Sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1

## Ejercicio.

Sean  $V$  un espacio vectorial complejo,  $W$  un subespacio de  $V$ ,  $a \in V \setminus W$ .

# Sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1

## Ejercicio.

Sean  $V$  un espacio vectorial complejo,  $W$  un subespacio de  $V$ ,  $a \in V \setminus W$ .

Demostrar que  $W \cap (\mathbb{C}a) = \{0_V\}$ .

# Sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1

## Ejercicio.

Sean  $V$  un espacio vectorial complejo,  $W$  un subespacio de  $V$ ,  $a \in V \setminus W$ .

Demostrar que  $W \cap (\mathbb{C}a) = \{0_V\}$ .

Demostrar que cada elemento de  $W + \mathbb{C}a$  tiene una representación **única** en forma

$$w + \lambda a, \quad \text{con } w \in W, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sugerencia: suponer que  $w_1 + \lambda_1 a = w_2 + \lambda_2 a$ , con  $w_1, w_2 \in W$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , y demostrar que  $w_1 = w_2$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

# Sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1

## Ejercicio.

Sean  $V$  un espacio vectorial complejo,  $W$  un subespacio de  $V$ ,  $a \in V \setminus W$ .

Demostrar que  $W \cap (\mathbb{C}a) = \{0_V\}$ .

Demostrar que cada elemento de  $W + \mathbb{C}a$  tiene una representación **única** en forma

$$w + \lambda a, \quad \text{con } w \in W, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sugerencia: suponer que  $w_1 + \lambda_1 a = w_2 + \lambda_2 a$ , con  $w_1, w_2 \in W$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , y demostrar que  $w_1 = w_2$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

En otras palabras,  $W + \mathbb{C}a$  es la **suma directa** de  $W$  y  $\mathbb{C}a$ .

# Criterio de hipersubespacio

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $W$  un subespacio de  $V$ .

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a)  $V/W$  es un espacio vectorial de dimensión 1.
- (b) existe  $a$  en  $V \setminus W$  tal que  $V = W + \mathbb{C}a$ .

## Criterio de hipersubespacio

### Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $W$  un subespacio de  $V$ .

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a)  $V/W$  es un espacio vectorial de dimensión 1.
- (b) existe  $a$  en  $V \setminus W$  tal que  $V = W + \mathbb{C}a$ .

### Observación.

Como vimos en el ejercicio anterior, en la condición (b) tenemos una suma directa.

## Criterio de hipersubespacio

### Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $W$  un subespacio de  $V$ .

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a)  $V/W$  es un espacio vectorial de dimensión 1.
- (b) existe  $a$  en  $V \setminus W$  tal que  $V = W + \mathbb{C}a$ .

### Observación.

Como vimos en el ejercicio anterior, en la condición (b) tenemos una suma directa.

Cuando  $W$  tiene una de estas propiedades, se dice que  $W$  es un hipersubespacio o subespacio de codimensión 1.

# Demostración, (a) $\implies$ (b)

Supongamos que  $\dim(V/W) = 1$ .

# Demostración, (a) $\implies$ (b)

Supongamos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Elegimos  $A \in V/W$  tal que  $V/W = \text{lin}(A)$ .

# Demostración, (a) $\implies$ (b)

Supongamos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Elegimos  $A \in V/W$  tal que  $V/W = \text{lin}(A)$ .

Elegimos  $a \in A$ . Entonces  $A = a + W$ .

## Demostración, (a) $\implies$ (b)

Supongamos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Elegimos  $A \in V/W$  tal que  $V/W = \text{lin}(A)$ .

Elegimos  $a \in A$ . Entonces  $A = a + W$ .

Demostremos que  $a \notin W$ .

## Demostración, (a) $\implies$ (b)

Supongamos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Elegimos  $A \in V/W$  tal que  $V/W = \text{lin}(A)$ .

Elegimos  $a \in A$ . Entonces  $A = a + W$ .

Demostremos que  $a \notin W$ .

Si  $a \in W$ , entonces  $A = W = 0_{V/W}$  y  $\dim(V/W) = 0$ . Contradicción.

## Demostración, (a) $\implies$ (b)

Supongamos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Elegimos  $A \in V/W$  tal que  $V/W = \text{lin}(A)$ .

Elegimos  $a \in A$ . Entonces  $A = a + W$ .

Demostremos que  $a \notin W$ .

Si  $a \in W$ , entonces  $A = W = 0_{V/W}$  y  $\dim(V/W) = 0$ . Contradicción.

Demostremos que  $V \subseteq W + \mathbb{C}a$ .

## Demostración, (a) $\implies$ (b)

Supongamos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Elegimos  $A \in V/W$  tal que  $V/W = \text{lin}(A)$ .

Elegimos  $a \in A$ . Entonces  $A = a + W$ .

Demostremos que  $a \notin W$ .

Si  $a \in W$ , entonces  $A = W = 0_{V/W}$  y  $\dim(V/W) = 0$ . Contradicción.

Demostremos que  $V \subseteq W + \mathbb{C}a$ .

Sea  $x \in V$ .

## Demostración, (a) $\implies$ (b)

Supongamos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Elegimos  $A \in V/W$  tal que  $V/W = \text{lin}(A)$ .

Elegimos  $a \in A$ . Entonces  $A = a + W$ .

Demostremos que  $a \notin W$ .

Si  $a \in W$ , entonces  $A = W = 0_{V/W}$  y  $\dim(V/W) = 0$ . Contradicción.

Demostremos que  $V \subseteq W + \mathbb{C}a$ .

Sea  $x \in V$ . Como  $x + W \in V/W = \text{lin}(A)$ , existe  $\lambda$  en  $\mathbb{C}$  tal que  $x + W = \lambda a + W$ .

# Demostración, (a) $\implies$ (b)

Supongamos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Elegimos  $A \in V/W$  tal que  $V/W = \text{lin}(A)$ .

Elegimos  $a \in A$ . Entonces  $A = a + W$ .

Demostremos que  $a \notin W$ .

Si  $a \in W$ , entonces  $A = W = 0_{V/W}$  y  $\dim(V/W) = 0$ . Contradicción.

Demostremos que  $V \subseteq W + \mathbb{C}a$ .

Sea  $x \in V$ . Como  $x + W \in V/W = \text{lin}(A)$ , existe  $\lambda$  en  $\mathbb{C}$  tal que  $x + W = \lambda a + W$ .

Esto implica que  $x - \lambda a \in W$ ,  $x \in W + \mathbb{C}a$ .

# Demostración, (b) $\implies$ (a)

Supongamos que  $a$  en  $V \setminus W$  y  $V = W + \mathbb{C}a$ .

# Demostración, (b) $\implies$ (a)

Supongamos que  $a$  en  $V \setminus W$  y  $V = W + \mathbb{C}a$ .

Demostremos que el vector  $a + W$  forma una base de  $V/W$ .

## Demostración, (b) $\implies$ (a)

Supongamos que  $a$  en  $V \setminus W$  y  $V = W + \mathbb{C}a$ .

Demostremos que el vector  $a + W$  forma una base de  $V/W$ .

Como  $a \notin W$ , tenemos  $a + W \neq W$ , esto es,  $a + W \neq 0_{V/W}$ .

## Demostración, (b) $\implies$ (a)

Supongamos que  $a$  en  $V \setminus W$  y  $V = W + \mathbb{C}a$ .

Demostremos que el vector  $a + W$  forma una base de  $V/W$ .

Como  $a \notin W$ , tenemos  $a + W \neq W$ , esto es,  $a + W \neq 0_{V/W}$ .

Sea  $X \in V/W$ . Elegimos  $x \in X$ .

## Demostración, (b) $\implies$ (a)

Supongamos que  $a$  en  $V \setminus W$  y  $V = W + \mathbb{C}a$ .

Demostremos que el vector  $a + W$  forma una base de  $V/W$ .

Como  $a \notin W$ , tenemos  $a + W \neq W$ , esto es,  $a + W \neq 0_{V/W}$ .

Sea  $X \in V/W$ . Elegimos  $x \in X$ .

Entonces existen  $w \in W$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  tales que  $x = w + \lambda a$ .

# Demostración, (b) $\implies$ (a)

Supongamos que  $a$  en  $V \setminus W$  y  $V = W + \mathbb{C}a$ .

Demostremos que el vector  $a + W$  forma una base de  $V/W$ .

Como  $a \notin W$ , tenemos  $a + W \neq W$ , esto es,  $a + W \neq 0_{V/W}$ .

Sea  $X \in V/W$ . Elegimos  $x \in X$ .

Entonces existen  $w \in W$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  tales que  $x = w + \lambda a$ .

Luego  $x \in \lambda a + W$ , esto es,  $X = \lambda a + W = \lambda(a + W)$ .

Si  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  es un funcional lineal, entonces  $\ker(f)$  es un subespacio de  $V$ .

Si  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  es un funcional lineal, entonces  $\ker(f)$  es un subespacio de  $V$ .

Obviamente,

$$f = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}} \iff \ker(f) = V.$$

# Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal no nulo. Entonces  $\ker(f)$  es un hipersubespacio en  $V$ .

# Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal no nulo. Entonces  $\ker(f)$  es un hipersubespacio en  $V$ .

## Demostración.

Pongamos  $W := \ker(f)$ . Elegimos  $a \in V$  tal que  $f(a) \neq 0$ . Entonces  $a \notin W$ .

# Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal no nulo. Entonces  $\ker(f)$  es un hipersubespacio en  $V$ .

### **Demostración.**

Pongamos  $W := \ker(f)$ . Elegimos  $a \in V$  tal que  $f(a) \neq 0$ . Entonces  $a \notin W$ .

Demostremos que  $V = W + \mathbb{C}a$ . Sea  $x \in V$ .

# Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal no nulo. Entonces  $\ker(f)$  es un hipersubespacio en  $V$ .

### **Demostración.**

Pongamos  $W := \ker(f)$ . Elegimos  $a \in V$  tal que  $f(a) \neq 0$ . Entonces  $a \notin W$ .

Demostremos que  $V = W + \mathbb{C}a$ . Sea  $x \in V$ . Pongamos

$$w := x - \frac{f(x)}{f(a)} a.$$

# Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal no nulo. Entonces  $\ker(f)$  es un hipersubespacio en  $V$ .

### **Demostración.**

Pongamos  $W := \ker(f)$ . Elegimos  $a \in V$  tal que  $f(a) \neq 0$ . Entonces  $a \notin W$ .

Demostremos que  $V = W + \mathbb{C}a$ . Sea  $x \in V$ . Pongamos

$$w := x - \frac{f(x)}{f(a)} a.$$

Entonces  $f(w) = 0$ ,

# Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal no nulo. Entonces  $\ker(f)$  es un hipersubespacio en  $V$ .

### **Demostración.**

Pongamos  $W := \ker(f)$ . Elegimos  $a \in V$  tal que  $f(a) \neq 0$ . Entonces  $a \notin W$ .

Demostremos que  $V = W + \mathbb{C}a$ . Sea  $x \in V$ . Pongamos

$$w := x - \frac{f(x)}{f(a)} a.$$

Entonces  $f(w) = 0$ ,  $w \in W$ ,

# Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal no nulo. Entonces  $\ker(f)$  es un hipersubespacio en  $V$ .

### Demostración.

Pongamos  $W := \ker(f)$ . Elegimos  $a \in V$  tal que  $f(a) \neq 0$ . Entonces  $a \notin W$ .

Demostremos que  $V = W + \mathbb{C}a$ . Sea  $x \in V$ . Pongamos

$$w := x - \frac{f(x)}{f(a)} a.$$

Entonces  $f(w) = 0$ ,  $w \in W$ ,  $x = w + \frac{f(x)}{f(a)} a \in W + \mathbb{C}a$ .

# Los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $W$  un hipersubespacio de  $V$ .

Entonces existe un funcional lineal no nulo  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\ker(f) = W$ .

# Los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $W$  un hipersubespacio de  $V$ .

Entonces existe un funcional lineal no nulo  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\ker(f) = W$ .

### Idea de demostración.

Sea  $a \in V \setminus W$  tal que  $V = W + \mathbb{C}a$ . Vamos a definir  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ .

# Los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $W$  un hipersubespacio de  $V$ .  
Entonces existe un funcional lineal no nulo  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\ker(f) = W$ .

### Idea de demostración.

Sea  $a \in V \setminus W$  tal que  $V = W + \mathbb{C}a$ . Vamos a definir  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ .

Dado  $x$  en  $V$ , existe un único par  $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$  tal que  $x = w + \lambda a$ .

Pongamos  $f(x) := \lambda$ .

# Los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $W$  un hipersubespacio de  $V$ .  
Entonces existe un funcional lineal no nulo  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\ker(f) = W$ .

### Idea de demostración.

Sea  $a \in V \setminus W$  tal que  $V = W + \mathbb{C}a$ . Vamos a definir  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ .

Dado  $x$  en  $V$ , existe un único par  $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$  tal que  $x = w + \lambda a$ .

Pongamos  $f(x) := \lambda$ .

Es fácil ver que  $f$  es lineal y que  $\ker(f) = W$ .

# Plan

- 1 Introducción y definición
- 2 Hipersubespacios
- 3 ¿Cuándo  $\ker(f) = \ker(g)$ ?
- 4  $f$  es acotado  $\iff \ker(f)$  es cerrado

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $f, g: V \rightarrow \mathbb{C}$  funcionales lineales. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) Existe  $c$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $g = cf$ .
- (b)  $\ker(f) = \ker(g)$ .

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $f, g: V \rightarrow \mathbb{C}$  funcionales lineales. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) Existe  $c$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $g = cf$ .
- (b)  $\ker(f) = \ker(g)$ .

La implicación (a) $\implies$ (b) es trivial.

## Demostración (b) $\implies$ (a)

Suponemos  $\ker(f) = \ker(g)$ . Lo denotamos por  $W$ .

Si  $f = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ , entonces  $\ker(g) = V = \ker(f)$ , luego  $g = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ .

## Demostración (b) $\implies$ (a)

Suponemos  $\ker(f) = \ker(g)$ . Lo denotamos por  $W$ .

Si  $f = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ , entonces  $\ker(g) = V = \ker(f)$ , luego  $g = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ .

Suponemos  $f \neq 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ . Elegimos  $a \in V \setminus W$ .

## Demostración (b) $\implies$ (a)

Suponemos  $\ker(f) = \ker(g)$ . Lo denotamos por  $W$ .

Si  $f = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ , entonces  $\ker(g) = V = \ker(f)$ , luego  $g = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ .

Suponemos  $f \neq 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ . Elegimos  $a \in V \setminus W$ .

Entonces  $V = W + \mathbb{C}a$ ,  $f(a) \neq 0$ ,  $g(a) \neq 0$ .

## Demostración (b) $\implies$ (a)

Suponemos  $\ker(f) = \ker(g)$ . Lo denotamos por  $W$ .

Si  $f = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ , entonces  $\ker(g) = V = \ker(f)$ , luego  $g = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ .

Suponemos  $f \neq 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ . Elegimos  $a \in V \setminus W$ .

Entonces  $V = W + \mathbb{C}a$ ,  $f(a) \neq 0$ ,  $g(a) \neq 0$ . Pongamos

$$c := \frac{g(a)}{f(a)}.$$

## Demostración (b) $\implies$ (a)

Suponemos  $\ker(f) = \ker(g)$ . Lo denotamos por  $W$ .

Si  $f = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ , entonces  $\ker(g) = V = \ker(f)$ , luego  $g = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ .

Suponemos  $f \neq 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ . Elegimos  $a \in V \setminus W$ .

Entonces  $V = W + \mathbb{C}a$ ,  $f(a) \neq 0$ ,  $g(a) \neq 0$ . Pongamos

$$c := \frac{g(a)}{f(a)}.$$

Dado  $x$  en  $V$ , encontramos  $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$  tal que  $x = w + \lambda a$ .

## Demostración (b) $\implies$ (a)

Suponemos  $\ker(f) = \ker(g)$ . Lo denotamos por  $W$ .

Si  $f = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ , entonces  $\ker(g) = V = \ker(f)$ , luego  $g = 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ .

Suponemos  $f \neq 0_{V \rightarrow \mathbb{C}}$ . Elegimos  $a \in V \setminus W$ .

Entonces  $V = W + \mathbb{C}a$ ,  $f(a) \neq 0$ ,  $g(a) \neq 0$ . Pongamos

$$c := \frac{g(a)}{f(a)}.$$

Dado  $x$  en  $V$ , encontramos  $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$  tal que  $x = w + \lambda a$ . Entonces

$$g(x) = g(w + \lambda a) = \lambda g(a) = \lambda c f(a) = c f(w + \lambda a) = c f(x).$$

# Plan

- 1 Introducción y definición
- 2 Hipersubespacios
- 3 ¿Cuándo  $\ker(f) = \ker(g)$ ?
- 4  $f$  es acotado  $\iff \ker(f)$  es cerrado

## Proposición

Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces

$$f \text{ es acotado} \iff \ker(f) \text{ es cerrado.}$$

## Proposición

Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces

$$f \text{ es acotado} \iff \ker(f) \text{ es cerrado.}$$

La implicación  $\implies$  es trivial porque

## Proposición

Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces

$$f \text{ es acotado} \iff \ker(f) \text{ es cerrado.}$$

La implicación  $\implies$  es trivial porque

$$\ker(f) = f^{-1}[\{0\}],$$

y el conjunto  $\{0\}$  es cerrado en  $\mathbb{C}$ .

## Demostración de $\iff$

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ . Sea  $a \in V \setminus W$ .

Demostración de  $\Leftarrow$ 

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ . Sea  $a \in V \setminus W$ .

$$r := d(a, W), \quad \text{esto es,} \quad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Demostración de  $\Leftarrow$ 

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ . Sea  $a \in V \setminus W$ .

$$r := d(a, W), \quad \text{esto es,} \quad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado  $x$  en  $V$ , encontramos  $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$  tal que  $x = w + \lambda a$ .

Demostración de  $\Leftarrow$ 

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ . Sea  $a \in V \setminus W$ .

$$r := d(a, W), \quad \text{esto es,} \quad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado  $x$  en  $V$ , encontramos  $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$  tal que  $x = w + \lambda a$ . Si  $\lambda \neq 0$ , entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a),$$

Demostración de  $\Leftarrow$ 

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ . Sea  $a \in V \setminus W$ .

$$r := d(a, W), \quad \text{esto es,} \quad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado  $x$  en  $V$ , encontramos  $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$  tal que  $x = w + \lambda a$ . Si  $\lambda \neq 0$ , entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \quad \|x\| = \|w + \lambda a\| = |\lambda| \left\| a + \frac{1}{\lambda} w \right\| \geq |\lambda| r,$$

Demostración de  $\Leftarrow$ 

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ . Sea  $a \in V \setminus W$ .

$$r := d(a, W), \quad \text{esto es,} \quad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado  $x$  en  $V$ , encontramos  $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$  tal que  $x = w + \lambda a$ . Si  $\lambda \neq 0$ , entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \quad \|x\| = \|w + \lambda a\| = |\lambda| \left\| a + \frac{1}{\lambda} w \right\| \geq |\lambda| r,$$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \frac{|f(a)|}{r}.$$

Demostración de  $\Leftarrow$ 

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ . Sea  $a \in V \setminus W$ .

$$r := d(a, W), \quad \text{esto es,} \quad r = \inf_{y \in W} \|a - y\|.$$

Dado  $x$  en  $V$ , encontramos  $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$  tal que  $x = w + \lambda a$ . Si  $\lambda \neq 0$ , entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \quad \|x\| = \|w + \lambda a\| = |\lambda| \left\| a + \frac{1}{\lambda} w \right\| \geq |\lambda| r,$$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \frac{|f(a)|}{r}.$$

En el caso  $\lambda = 0$ , la desigualdad también se cumple.

## Otra demostración de $\iff$

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ .

Entonces  $V/W$  es un espacio normado. Ya sabemos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Otra demostración de  $\iff$ 

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ .

Entonces  $V/W$  es un espacio normado. Ya sabemos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Sea  $Q: V \rightarrow V/W$  la proyección canónica:  $Q(x) := x + W$ .

## Otra demostración de $\iff$

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ .

Entonces  $V/W$  es un espacio normado. Ya sabemos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Sea  $Q: V \rightarrow V/W$  la proyección canónica:  $Q(x) := x + W$ .

Sabemos que  $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$ .

Otra demostración de  $\iff$ 

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ .

Entonces  $V/W$  es un espacio normado. Ya sabemos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Sea  $Q: V \rightarrow V/W$  la proyección canónica:  $Q(x) := x + W$ .

Sabemos que  $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$ .

Sea  $A: V/W \rightarrow \mathbb{C}$  un isomorfismo.

Otra demostración de  $\iff$ 

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ .

Entonces  $V/W$  es un espacio normado. Ya sabemos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Sea  $Q: V \rightarrow V/W$  la proyección canónica:  $Q(x) := x + W$ .

Sabemos que  $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$ .

Sea  $A: V/W \rightarrow \mathbb{C}$  un isomorfismo.

Como  $\dim(V/W) = 1$ ,  $A \in \mathcal{B}(V/W, \mathbb{C})$ .

Otra demostración de  $\iff$ 

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ .

Entonces  $V/W$  es un espacio normado. Ya sabemos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Sea  $Q: V \rightarrow V/W$  la proyección canónica:  $Q(x) := x + W$ .

Sabemos que  $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$ .

Sea  $A: V/W \rightarrow \mathbb{C}$  un isomorfismo.

Como  $\dim(V/W) = 1$ ,  $A \in \mathcal{B}(V/W, \mathbb{C})$ .

Consideramos  $g := A \circ Q$ . Tenemos  $g \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$  y

$$\ker(g) = \{x \in V: x + W = W\} = W.$$

Otra demostración de  $\iff$ 

Supongamos que  $W := \ker(f)$  es cerrado y que  $W \neq V$ .

Entonces  $V/W$  es un espacio normado. Ya sabemos que  $\dim(V/W) = 1$ .

Sea  $Q: V \rightarrow V/W$  la proyección canónica:  $Q(x) := x + W$ .

Sabemos que  $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$ .

Sea  $A: V/W \rightarrow \mathbb{C}$  un isomorfismo.

Como  $\dim(V/W) = 1$ ,  $A \in \mathcal{B}(V/W, \mathbb{C})$ .

Consideramos  $g := A \circ Q$ . Tenemos  $g \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$  y

$$\ker(g) = \{x \in V: x + W = W\} = W.$$

Como  $\ker(f) = \ker(g)$ , existe  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $f = cg$ . Luego  $f \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ .

## Ejemplos de funcionales lineales no acotados

### Ejercicio.

Aceptemos como un hecho que cualquier conjunto linealmente independiente está contenido en una base de Hamel.

Demostrar la existencia de un funcional lineal no acotado  $f: c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ .

Verificar que  $\ker(f)$  es un hipersubespacio no es cerrado.

## Ejemplos de funcionales lineales no acotados

### Ejercicio.

Aceptemos como un hecho que cualquier conjunto linealmente independiente está contenido en una base de Hamel.

Demostrar la existencia de un funcional lineal no acotado  $f: c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ .

Verificar que  $\ker(f)$  es un hipersubespacio no es cerrado.

### Ejercicio.

Sea  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal no acotado.

Demostrar que el subespacio  $\ker(f)$  es denso en  $V$ .