Funcionales lineales acotados y sus núcleos

Objetivos. Dados dos funcionales lineales no nulos $f, g\colon V \to \mathbb{C}$, demostrar que

$$f, g \text{ son linealmente dependientes} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) = \ker(g).$$

Dado un espacio normado complejo V y un funcional lineal $f\colon V \to \mathbb{C}$, demostrar que

$$f \text{ es continuo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) \text{ es cerrado}.$$

Prerrequisitos. El criterio de continuidad de funcionales lineales, el espacio cociente de un espacio vectorial sobre un subespacio, el espacio cociente de un espacio normado sobre un subespacio cerrado, hipersubespacios de espacios vectoriales.

1 Proposición (repaso: criterio de hipersubespacio)**.** *Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\dim(V/W) = 1$*;*

(b) existe a en $V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$;

(c) existe un funcional lineal no nulo $f\colon V \to \mathbb{C}$ tal que $W = \ker(f)$.

2 Proposición (repaso: criterio de funcional lineal nulo)**.** *Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces*

$$f = 0_{V\to\mathbb{C}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) = V.$$

3 Proposición (criterio de igualdad de los núcleos de funcionales lineales)**.** *Sea V un espacio vectorial complejo y sean $f, g\colon V \to \mathbb{C}$ funcionales lineales. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) existe ξ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $g = \xi f$;

(b) $\ker(f) = \ker(g)$.

Demostración. La implicación (a)$\Longrightarrow$(b) es trivial. Mostremos que (b) implica (a). Supongamos que $\ker(f) = \ker(g)$. Pongamos $W \coloneqq \ker(f)$.

Si $f = 0_{V\to\mathbb{C}}$, entonces $\ker(g) = V = \ker(f)$, luego $g = 0_{V\to\mathbb{C}}$.

Suponemos que $f \neq 0_{V\to\mathbb{C}}$. Elegimos $a \in V \setminus W$. Entonces

$$V = W + \mathbb{C}a.$$

Como $a \notin W$ y $\ker(f) = \ker(g) = W$, obtenemos que $f(a) \neq 0$ y $g(a) \neq 0$. Pongamos

$$\xi \coloneqq \frac{g(a)}{f(a)}.$$

Dado x en V, encontramos $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Entonces

$$g(x) = g(w + \lambda a) = \lambda g(a) = \lambda \xi f(a) = \xi f(w + \lambda a) = \xi f(x).$$

Hemos demostrado que $g = \xi f$. $\square$

4 Proposición (criterio de funcional lineal acotado en términos de su núcleo)**.** *Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$. Entonces*

$$f \text{ es acotado} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) \text{ es cerrado.}$$

Demostración. $\Longrightarrow$. Supongamos que f es un funcional lineal acotado, es decir, continuo. Entonces $\ker(f)$ es cerrado, porque

$$\ker(f) = f^{-1}[\{0\}]$$

y el conjunto $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{C}$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $W \coloneqq \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos

$$r \coloneqq d(a, W), \qquad \text{esto es,} \qquad r = \inf_{y\in W} \|a - y\|.$$

Dado x en V, encontramos (w, λ) en $W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$f(x) = f(w + \lambda a) = \lambda f(a), \qquad \|x\| = \|w + \lambda a\| = |\lambda| \left\| a + \frac{1}{\lambda} w \right\| \geq |\lambda|\, r,$$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \frac{|f(a)|}{r}.$$

En el caso $\lambda = 0$, la desigualdad también se cumple. $\square$

Otra demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $W := \ker(f)$ es cerrado y que $W \neq V$. Entonces V/W es un espacio normado. Ya sabemos que $\dim(V/W) = 1$.

Sea $Q\colon V \to V/W$ la proyección canónica: $Q(x) := x + W$. Sabemos que $Q \in \mathcal{B}(V, V/W)$.

Sea $A\colon V/W \to \mathbb{C}$ un isomorfismo. Como $\dim(V/W) = 1$, $A \in \mathcal{B}(V/W, \mathbb{C})$.

Consideramos $g := A \circ Q$. Tenemos que $g \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ y

$$\begin{aligned}\ker(g) &= \{x \in V\colon \quad A(Q(x)) = 0\} = \big\{x \in V\colon \quad Q(x) = 0_{V/W}\big\}\\ &= \{x \in V\colon \quad x + W = W\} = W.\end{aligned}$$

Como $\ker(f) = \ker(g)$, existe $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $f = \xi g$. Luego $f \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$. $\square$

Ejemplos de funcionales lineales no acotados

5 Ejercicio. Sea c_{fin} el espacio de las sucesiones de soporte finito. Consideramos c_{fin} con la norma-supremo. Dada una sucesión x en c_{fin}, pongamos

$$S(x) := \big\{k \in \mathbb{N}\colon\ x_k \neq 0\big\}, \qquad M(x) := \max(S(x)).$$

Notemos que para cada x, y en c_{fin},

$$S(x + y) \subseteq S(x) \cup S(y), \qquad M(x + y) \leq \max\{M(x), M(y)\},$$

y para cada x en c_{fin} y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$S(\lambda x) = S(x), \qquad M(\lambda x) = M(x).$$

Definimos $f\colon c_{\text{fin}} \to \mathbb{C}$,

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k\, x_k.$$

La serie se reduce a una suma finita y por eso converge:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{M(x)} k\, x_k.$$

Es fácil demostrar que f es un funcional lineal. Para cada m en $\mathbb{N}$ tenemos que

$$\frac{|f(e_m)|}{\|e_m\|_\infty} = m,$$

por eso f no es acotado. El núcleo de f consiste de todas las sucesiones x de clase c_{fin} tales que

$$\sum_{k=1}^{M(x)} k\, x_k = 0.$$

Demostremos que $e_1 \in \operatorname{cl}(\ker(f))$. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos j en $\mathbb{N}$ tal que $j > 1/\varepsilon$, y pongamos

$$x \coloneqq \frac{1}{j}\, e_j.$$

Entonces

$$f(e_1 - x) = f(e_1) - \frac{1}{j} f(e_j) = 1 - 1 = 0,$$

así que $e_1 - x \in \ker(f)$. Pero

$$\|e_1 - (e_1 - x)\|_\infty = \|x\|_\infty = \frac{1}{j} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $d(e_1, \ker(f)) < \varepsilon$. Como ε es arbitrario, concluimos que $e_1 \in \operatorname{cl}(\ker(f))$.

6 Ejercicio. Aceptemos el siguiente hecho (que se puede demostrar usando el lema de Zorn): cualquier conjunto linealmente independiente está contenido en una base de Hamel. Demostrar la existencia de un funcional lineal no acotado $f\colon c_0 \to \mathbb{C}$.
Verificar que $\ker(f)$ no es cerrado.

7 Ejercicio. Sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no acotado. Demostrar que el subespacio $\ker(f)$ es denso en V.