Rectas básicas de la gráfica de una función convexa

Objetivos. Demostrar el resultado sobre rectas básicas para la gráfica de una función convexa.

Requisitos. Funciones convexas, derivadas laterales de una función convexa.

1 Proposición (sobre las rectas básicas de la gráfica de una función convexa)**.** *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa y c un punto interior de A. Entonces existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para cada x en A,*

$$\varphi(x) \geq \alpha(x - c) + f(c). \tag{1}$$

El papel de α puede hacer cualquier elemento del intervalo cerrado $[\varphi'_{\text{izq}}(c), \varphi'_{\text{der}}(c)]$.

Demostración. Como φ es convexa, sus derivadas unilaterales en el punto c existen, son finitas y satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\varphi'_{\text{izq}}(c) \leq \varphi'_{\text{der}}(c).$$

Sea α cualquier número del intervalo $[\varphi'_{\text{izq}}(c), \varphi'_{\text{der}}(c)]$.

1. Probemos (1) para cada x en A tal que $x < c$. De la fórmula

$$\varphi'_{\text{izq}}(c) = \sup_{\substack{x \in A \\ x < c}} \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c}$$

se sigue que para todo $x < c$ se cumple la desigualdad

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} \leq \varphi'_{\text{izq}}(c) \leq \alpha.$$

Multiplicamos esta desigualdad por el número negativo $x - c$:

$$\varphi(x) - \varphi(c) \geq \alpha(x - c).$$

Al despejar $\varphi(x)$ obtenemos (1).

2. Si $x \in A$ y $x > c$, entonces (1) se obtiene de la fórmula

$$\varphi'_{der}(c) = \inf_{\substack{x \in A \\ x > c}} \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c},$$

al multiplicarla $x - c > 0$ y despejar $\varphi(x)$.

3. Para $x = c$, la fórmula (1) se convierte en la igualdad trivial $\varphi(c) = \varphi(c)$. □