Bolas en espacios normados

(un tema de análisis)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

17 de marzo de 2022

Propiedades de bolas en un espacio métrico (repaso)

Sea (X, d) un espacio métrico.

$$B(a, r) := \{x \in X : \ d(x, a) < r\} \qquad (a \in X, \ r > 0).$$

- Sobre bolas concéntricas:
  si $a \in X$, $0 < r_1 < r_2$, entonces $B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2)$.
- Sobre una bola contenida en otra:
  si $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$, $d(a_1, a_2) + r_1 \leq r_2$, entonces $B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2)$.
- Sobre bolas disjuntas:
  si $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$, $r_1 + r_2 < d(a_1, a_2)$, entonces $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset$.

La suma de dos conjuntos en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

La suma de dos conjuntos en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X + Y \;:=\; \Big\{ v \in V\colon \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \Big\}.$$

La suma de dos conjuntos en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$\boxed{X + Y \ := \ \Big\{ v \in V : \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \Big\}.}$$

Esta definición se puede escribir también en forma abreviada:

$$X + Y = \{ x + y : \quad x \in X, \quad y \in Y \}.$$

La suma de dos conjuntos en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X + Y \;:=\; \Big\{ v \in V : \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \Big\}.$$

Esta definición se puede escribir también en forma abreviada:

$$X + Y = \{ x + y : \quad x \in X, \quad y \in Y \}.$$

En las demostraciones hay que usar la definición verdadera (con los dos cuantificadores $\exists$).

La suma de un vector y un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $u \in V$, $Y \subseteq V$.

$$\boxed{u + Y \ := \ \{u\} + Y.}\ .$$

La suma de un vector y un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $u \in V$, $Y \subseteq V$.

$$u + Y \ := \ \{u\} + Y. .$$

Obviamente,

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad \exists y \in Y \quad v = u + y \Big\}.$$

La suma de un vector y un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $u \in V$, $Y \subseteq V$.

$$u + Y \;:=\; \{u\} + Y. \,.$$

Obviamente,

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad \exists y \in Y \quad v = u + y \Big\}.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad v - u \in Y \Big\}.$$

La suma de un vector y un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $u \in V$, $Y \subseteq V$.

$$u + Y \;:=\; \{u\} + Y. \,.$$

Obviamente,

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad \exists y \in Y \quad v = u + y \Big\}.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad v - u \in Y \Big\}.$$

La última fórmula no tiene el cuantificador $\exists$, por eso es más cómoda en varias situaciones.

El producto de un escalar por un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $Y \subseteq V$.

$$\lambda Y \; := \; \Big\{ v \in V : \quad \exists y \in Y \quad v = \lambda y \Big\}.$$

El producto de un escalar por un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $Y \subseteq V$.

$$\lambda Y \ := \ \left\{ v \in V\colon \quad \exists y \in Y \quad v = \lambda y \right\}.$$

Ejercicio. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda Y = \left\{ v \in V\colon \quad \frac{1}{\lambda} v \in Y \right\}.$$

El producto de un escalar por un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $Y \subseteq V$.

$$\lambda Y \;:=\; \Big\{ v \in V\colon \quad \exists y \in Y \quad v = \lambda y \Big\}.$$

Ejercicio. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda Y = \left\{ v \in V\colon \quad \frac{1}{\lambda} v \in Y \right\}.$$

Ejercicio. Sea $Y \subseteq V$, $Y \neq \emptyset$. Demostrar que

$$0\, Y = \{0_V\}.$$

La diferencia aritmética de dos conjuntos

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X - Y \;:=\; \Big\{ v \in V\colon \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x - y \Big\}.$$

La diferencia aritmética de dos conjuntos

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X - Y \ := \ \Big\{ v \in V\colon \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x - y \Big\}.$$

Observación. En la teoría de conjuntos siempre usamos la notación $X \setminus Y$.

La diferencia aritmética de dos conjuntos

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X - Y \ := \ \Big\{ v \in V \colon \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x - y \Big\}.$$

Observación. En la teoría de conjuntos siempre usamos la notación $X \setminus Y$.

Ejercicio. Demostrar que

$$X - Y = X + (-1)Y.$$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demostrar las siguientes propiedades:

$$B(a,r) = a + B(0_V, r), \qquad B(0_V, r) = r\,B(0_V, 1), \qquad B(a,r) = a + r\,B(0_V, 1).$$

Se recomienda usar las fórmulas

$$a + Y \;:=\; \{v \in V\colon\; v - a \in Y\}, \qquad r\,Y \;:=\; \left\{v \in V\colon\quad \frac{1}{r}v \in Y\right\}.$$

La suma de dos bolas en un espacio normado

Ejercicio. Sean $r_1, r_2 > 0$. Demostrar que

$$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) = B(0_V, r_1 + r_2).$$

La suma de dos bolas en un espacio normado

Ejercicio. Sean $r_1, r_2 > 0$. Demostrar que

$$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) = B(0_V, r_1 + r_2).$$

Sugerencia: si $\|v\| < r_1 + r_2$, construir $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ tales que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

Es muy fácil adivinar algunos λ_1 y λ_2.

La suma de dos bolas en un espacio normado

Ejercicio. Sean $r_1, r_2 > 0$. Demostrar que

$$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) = B(0_V, r_1 + r_2).$$

Sugerencia: si $\|v\| < r_1 + r_2$, construir $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ tales que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

Es muy fácil adivinar algunos λ_1 y λ_2.

Ejercicio. Sean $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$. Demostrar que

$$B(a_1, r_1) + B(a_2, r_2) = B(a_1 + a_2, r_1 + r_2).$$

La diferencia de bolas en un espacio normado

Ejercicio. Encontrar

$$B(a_1, r_1) - B(a_2, r_2), \qquad B(0_V, r_1) - B(0_V, r_1).$$

El interior de subespacios de un espacio normado

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que $\operatorname{int}(W) \neq \emptyset$. Demostrar que $W = V$.

El interior de subespacios de un espacio normado

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que $\operatorname{int}(W) \neq \emptyset$. Demostrar que $W = V$.

Sugerencia: primero demostrar que existe $r > 0$ tal que $B(0_V, r) \subseteq W$.

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que $W \neq V$. Demostrar que $\operatorname{int}(W) = \emptyset$.

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

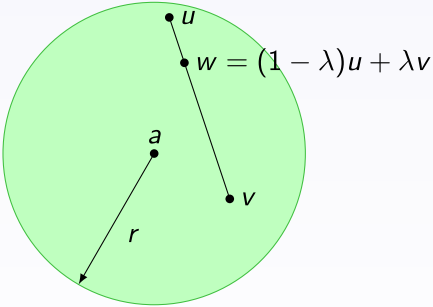
Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$,

$$w := (1 - \lambda)u + \lambda v.$$

Mostremos que

$$\|w - a\| < r.$$



Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. $\quad$ Entonces

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. $\quad$ Entonces

$$\|w - a\|$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. $\quad$ Entonces

$$\|w - a\| =$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v.\quad$ Entonces

$$\|w - a\| = \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\|$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. $\quad$ Entonces

$$\|w - a\| = \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| =$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. $\quad$ Entonces

$$\|w - a\| = \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\|$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. $\quad$ Entonces

$$\begin{aligned} \|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\ &\leq \end{aligned}$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v. \quad$ Entonces

$$\begin{aligned} \|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\ &\leq \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\| \end{aligned}$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. $\quad$ Entonces

$$\begin{aligned} \|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\ &\le \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\| = \end{aligned}$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. $\quad$ Entonces

$$\begin{aligned} \|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\ &\leq \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\| = (1 - \lambda)\|u - a\| + \lambda\|v - a\| \end{aligned}$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v.\quad$ Entonces

$$\begin{aligned} \|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\ &\leq \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\| = (1 - \lambda)\|u - a\| + \lambda\|v - a\| \\ &< \end{aligned}$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v. \quad$ Entonces

$$
\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\
&\leq \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\| = (1 - \lambda)\|u - a\| + \lambda\|v - a\| \\
&< (1 - \lambda)r + \lambda r
\end{aligned}
$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v.\quad$ Entonces

$$\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\| \\
&\leq \|(1-\lambda)(u-a)\| + \|\lambda(v-a)\| = (1-\lambda)\|u-a\| + \lambda\|v-a\| \\
&< (1-\lambda)r + \lambda r =
\end{aligned}$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v.\quad$ Entonces

$$\begin{aligned} \|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\ &\le \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\| = (1 - \lambda)\|u - a\| + \lambda\|v - a\| \\ &< (1 - \lambda)r + \lambda r = r. \end{aligned}$$

$\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. $\quad$ Entonces

$$\begin{aligned}\|w - a\| &= \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\| \\ &\leq \|(1-\lambda)(u-a)\| + \|\lambda(v-a)\| = (1-\lambda)\|u-a\| + \lambda\|v-a\| \\ &< (1-\lambda)r + \lambda r = r.\end{aligned}$$

Esto significa que $w \in B(a, r)$. $\square$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $V \neq \{0_V\}$.
Demostrar las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
B(a_1, r_1) \subseteq B(a_1, r_2) \quad &\Longrightarrow \quad r_1 \le r_2, \\
B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2) \quad &\Longrightarrow \quad \|a_1 - a_2\| + r_1 \le r_2, \\
B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset \quad &\Longrightarrow \quad r_1 + r_2 \le \|a_1 - a_2\|.
\end{aligned}
$$

Se recomienda demostrar estas propiedades en forma contrapositiva:

$$
r_1 > r_2 \qquad \Longrightarrow \qquad B(a_1, r_1) \setminus B(a_1, r_2) \neq \emptyset.
$$

En cada caso hay que construir un vector.

Ejercicio. Sean V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a \in V$, $r_1, r_2 > 0$.

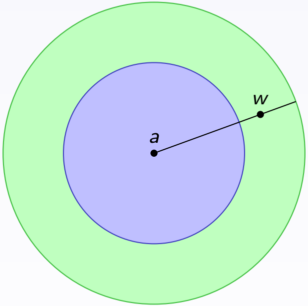
$$r_1 < r_2.$$

Demostrar que $B(a, r_2) \setminus B(a, r_1) \neq \emptyset$.

Ejercicio. Sean V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a \in V$, $r_1, r_2 > 0$.

$$r_1 < r_2.$$

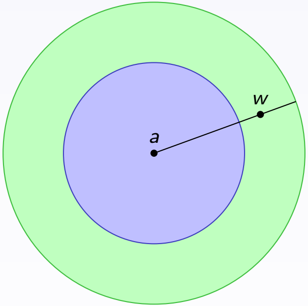
Demostrar que $B(a, r_2) \setminus B(a, r_1) \neq \emptyset$.



Ejercicio. Sean V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a \in V$, $r_1, r_2 > 0$.

$$r_1 < r_2.$$

Demostrar que $B(a, r_2) \setminus B(a, r_1) \neq \emptyset$.



Sea $b \in V \setminus \{0_V\}$.

Construir $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$w := a + \lambda b,$$

tal que

$$r_1 < \|w - a\| < r_2.$$

Ejercicio. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

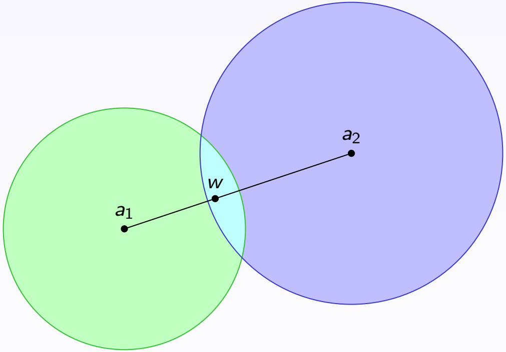
$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

Demostrar que $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.

Ejercicio. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

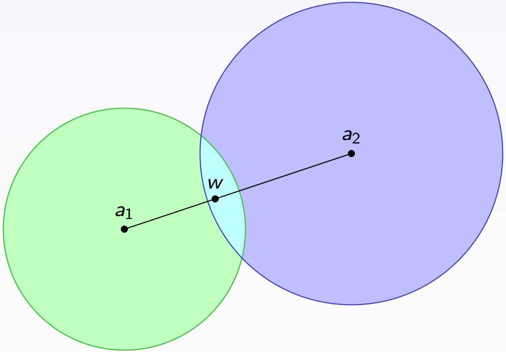
Demostrar que $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.



Ejercicio. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

Demostrar que $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.



Construir $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$w := (1 - \lambda)a_1 + \lambda a_2,$$

tal que

$$\|w - a_1\| < r_1, \quad \|w - a_2\| < r_2.$$

Ejercicio. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

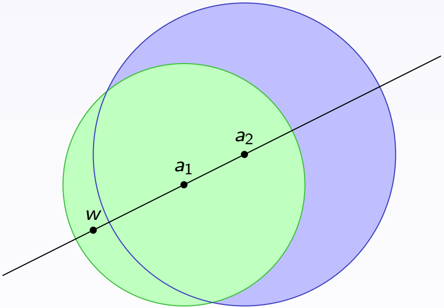
$$\|a_1 - a_2\| + r_1 > r_2.$$

Demostrar que $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.

Ejercicio. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| + r_1 > r_2.$$

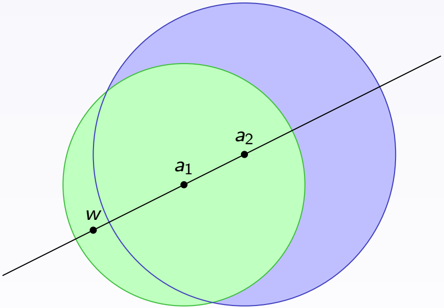
Demostrar que $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.



Ejercicio. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| + r_1 > r_2.$$

Demostrar que $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.



Construir $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$w := (1 - \lambda)a_1 + \lambda a_2,$$

tal que

$$\|w - a_1\| < r_1, \quad \|w - a_2\| \geq r_2.$$