# Bolas en espacios normados

**Objetivos.** Estudiar propiedades elementales de bolas en espacios normados.

**Prerrequisitos.** Norma, bolas en espacios métricos.

Sea $V$ un espacio vectorial complejo normado. Denotamos por $\|\cdot\|$ a la norma en $V$ y por $d$ a la métrica inducida:

$$d(a,b) \coloneqq \|a-b\| \qquad (a,b \in V).$$

Dados $a$ en $V$ y $r>0$, usamos la notación $B(a,r)$ para la bola con centro en $a$ de radio $r$:

$$B(a,r) = \{v \in V\colon\ d(a,v) < r\} = \{v \in V\colon\ \|v-a\| < r\}.$$

**1 Proposición.** *Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces la bola $B(a,r)$ es convexa.*

*Demostración.* Sean $v, w \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned}\|(1-\lambda)v + \lambda w - a\| &= \|(1-\lambda)(v-a) + \lambda(w-a)\| \\ &\le (1-\lambda)\|v-a\| + \lambda\|w-a\| < (1-\lambda)r + \lambda r = r,\end{aligned}$$

así que $(1-\lambda)v + \lambda w \in B(a,r)$. □

Recordemos que si $X \subseteq V$, $a \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned} a + X &= \{v \in V\colon \quad \exists u \in X \quad v = a + u\} = \{v \in V\colon \quad v - a \in X\}, \\ \lambda X &= \{v \in V\colon \quad \exists u \in X \quad v = \lambda u\} = \left\{v \in V\colon \quad \frac{1}{\lambda} v \in X\right\}. \end{aligned}$$

**2 Proposición.** *Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces*

$$B(a,r) = a + rB(0,1).$$

*Demostración.* Sea $v \in V$. Entonces

$$\begin{aligned} v \in{} & a + rB(0,1) \quad \Longleftrightarrow \quad v - a \in rB(0,1) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\|\frac{1}{r}(v-a)\right\| < 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{r}\|v-a\| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \|v-a\| < r \quad \Longleftrightarrow \quad v \in B(a,r). \end{aligned}$$ □

**3 Proposición.** *Sea* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Entonces*

$$\lambda B(0,1) = B(0,|\lambda|).$$

**4 Proposición.** *Sean* $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Entonces*

$$\lambda B(a,r) = B(\lambda a, |\lambda| r).$$

**5 Proposición.** *Sean* $a_1, a_2 \in V$ *y* $r_1, r_2 > 0$ *tales que*

$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

*Entonces*

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \varnothing.$$

*Demostración.* Pongamos

$$v := \frac{r_2}{r_1 + r_2} a_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_2} a_2.$$

Entonces

$$\|v - a_1\| = \left\| \frac{r_1}{r_1 + r_2}(a_2 - a_1) \right\| = \frac{r_1 \|a_2 - a_1\|}{r_1 + r_2} < r_1,$$

y de manera similar $\|v - a_2\| < r_2$. $\square$

**6 Proposición.** *Sean* $r_1, r_2 > 0$. *Entonces*

$$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) = B(0_V, r_1 + r_2).$$

*Demostración.* Demostremos la contención $\supseteq$. Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Pongamos

$$u := \frac{r_1}{r_1 + r_2} v, \qquad w := \frac{r_2}{r_1 + r_2} v.$$

Entonces $v = u + w$, $u \in B(0_V, r_1)$ y $w \in B(0_V, r_2)$. $\square$

**7 Proposición.** *Sean* $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$. *Entonces*

$$B(a_1, r_1) + B(a_2, r_2) = B(a_1 + a_2, r_1 + r_2).$$

*Demostración.* Demostremos la contención $\supseteq$. Sea $x \in B(a_1 + a_2, r_1 + r_2)$. Pongamos $v := x - (a_1 + a_2)$. Entonces por la Proposición 6 existen $u$ en $B(0_V, r_1)$ y $w$ en $B(0_V, r_2)$ tales que $v = u + w$. Pongamos $y := a_1 + u$, $z := a_2 + w$. Entonces $y \in B(a_1, r_1)$, $z \in B(a_2, r_2)$, y $x = y + z$. $\square$