Bolas en espacios normados y operaciones lineales

(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

19 de septiembre de 2022

La suma de dos conjuntos en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

La suma de dos conjuntos en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X + Y \; := \; \left\{ v \in V : \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x + y \right\}.$$

La suma de dos conjuntos en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X + Y \;:=\; \Big\{ v \in V : \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x + y \Big\}.$$

Esta definición se puede escribir también en forma abreviada:

$$X + Y = \{ x + y : \quad x \in X, \quad y \in Y \}.$$

La suma de dos conjuntos en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X + Y \ := \ \Big\{ v \in V : \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x + y \Big\}.$$

Esta definición se puede escribir también en forma abreviada:

$$X + Y = \{ x + y : \quad x \in X, \quad y \in Y \}.$$

En las demostraciones hay que usar la definición verdadera (con los cuantificadores $\exists$).

La suma de un vector y un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $u \in V$, $Y \subseteq V$.

$$u + Y \ := \ \{u\} + Y. \ .$$

La suma de un vector y un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $u \in V$, $Y \subseteq V$.

$$u + Y \;:=\; \{u\} + Y. \,.$$

Obviamente,

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad \exists y \in Y \quad v = u + y \Big\}.$$

La suma de un vector y un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $u \in V$, $Y \subseteq V$.

$$u + Y \;:=\; \{u\} + Y\,.\,.$$

Obviamente,

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad \exists y \in Y \quad v = u + y \Big\}.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad v - u \in Y \Big\}.$$

La suma de un vector y un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $u \in V$, $Y \subseteq V$.

$$u + Y \ := \ \{u\} + Y. \ .$$

Obviamente,

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad \exists y \in Y \quad v = u + y \Big\}.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad v - u \in Y \Big\}.$$

La última fórmula no tiene el cuantificador $\exists$, por eso es más cómoda en varias situaciones.

El producto de un escalar por un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $Y \subseteq V$.

$$\lambda Y \;:=\; \Big\{ v \in V \colon \quad \exists y \in Y \quad v = \lambda y \Big\}.$$

El producto de un escalar por un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $Y \subseteq V$.

$$\lambda Y \; := \; \Big\{ v \in V \colon \quad \exists y \in Y \quad v = \lambda y \Big\}.$$

Ejercicio. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda Y = \left\{ v \in V \colon \quad \frac{1}{\lambda} v \in Y \right\}.$$

El producto de un escalar por un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $Y \subseteq V$.

$$\lambda Y \;:=\; \Big\{ v \in V : \quad \exists y \in Y \quad v = \lambda y \Big\}.$$

Ejercicio. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda Y = \left\{ v \in V : \quad \frac{1}{\lambda} v \in Y \right\}.$$

Ejercicio. Sea $Y \subseteq V$, $Y \neq \emptyset$. Demostrar que

$$0\,Y = \{0_V\}.$$

La diferencia algebraica de dos conjuntos

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X - Y \;:=\; \Big\{ v \in V : \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x - y \Big\}.$$

La diferencia algebraica de dos conjuntos

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X - Y \;:=\; \Big\{ v \in V : \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x - y \Big\}.$$

Observación. En la teoría de conjuntos siempre usamos la notación $X \setminus Y$.

La diferencia algebraica de dos conjuntos

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X - Y \;:=\; \Big\{ v \in V \colon \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x - y \Big\}.$$

Observación. En la teoría de conjuntos siempre usamos la notación $X \setminus Y$.

Ejercicio. Demostrar que

$$X - Y = X + (-1)Y.$$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$B(a, r) = \{v \in V : \quad \|v - a\| < r\}.$$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$B(a, r) = \{v \in V : \quad \|v - a\| < r\}.$$

Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo.
Demostrar las siguientes propiedades:

$$B(a, r) = a + B(0_V, r), \qquad B(0_V, r) = r\, B(0_V, 1), \qquad B(a, r) = a + r\, B(0_V, 1).$$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$B(a,r) = \{v \in V\colon \quad \|v - a\| < r\}.$$

Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo.
Demostrar las siguientes propiedades:

$$B(a,r) = a + B(0_V, r), \qquad B(0_V, r) = r\,B(0_V, 1), \qquad B(a,r) = a + r\,B(0_V, 1).$$

Se recomienda usar las fórmulas

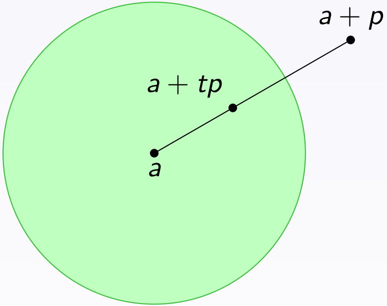
$$a + Y \;=\; \{v \in V\colon\; v - a \in Y\}, \qquad r\,Y \;=\; \left\{v \in V\colon \quad \frac{1}{r}v \in Y\right\}.$$

La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$.
Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$

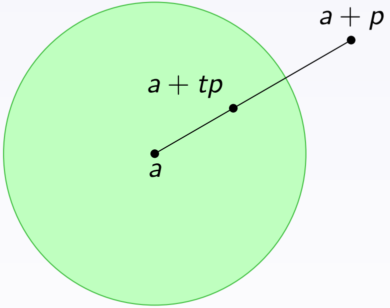


La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$. Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$



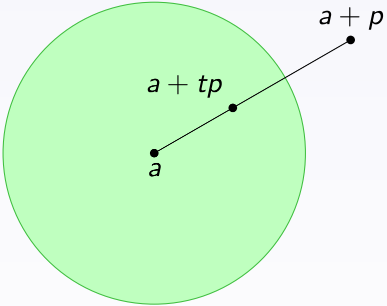
Demostración: $\|(a + tp) - a\| < r$

La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$. Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$



Demostración: $\|(a + tp) - a\| < r \quad \Longleftrightarrow$

La bola en un espacio normado

contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

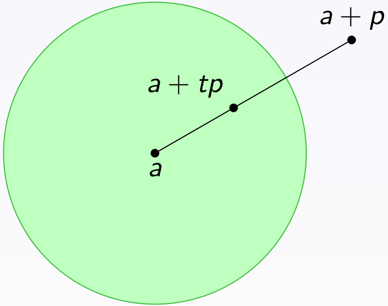
Proposición

Sea V un espacio normado complejo

y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$.

Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$



Demostración: $\|(a + tp) - a\| < r \quad \Longleftrightarrow \quad t\,\|p\| < r$

La bola en un espacio normado

contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

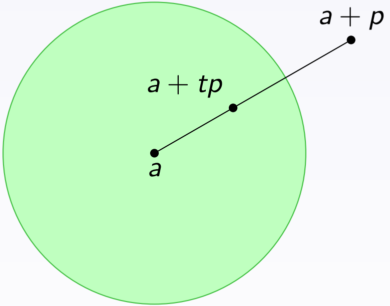
Proposición

Sea V un espacio normado complejo

y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$.

Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$



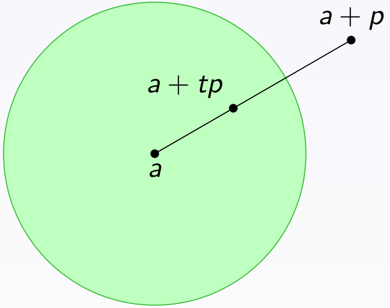
Demostración: $\|(a + tp) - a\| < r \quad \Longleftrightarrow \quad t\,\|p\| < r \quad \Longleftrightarrow$

La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$. Entonces

$$a + t\,p \in B(a,r) \qquad \iff \qquad t < \frac{r}{\|p\|}.$$



Demostración: $\|(a+tp) - a\| < r \quad \iff \quad t\,\|p\| < r \quad \iff \quad t < \dfrac{r}{\|p\|}.$

La suma de dos bolas en un espacio normado

Proposición

Sean $r_1, r_2 > 0$. Entonces

$$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) = B(0_V, r_1 + r_2).$$

La suma de dos bolas en un espacio normado

Proposición

Sean $r_1, r_2 > 0$. Entonces

$$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) = B(0_V, r_1 + r_2).$$

Demostración. La contención $\subseteq$ sale de la propiedad subaditiva de la norma.

La suma de dos bolas en un espacio normado

Proposición

Sean $r_1, r_2 > 0$. Entonces

$$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) = B(0_V, r_1 + r_2).$$

Demostración. La contención $\subseteq$ sale de la propiedad subaditiva de la norma.

Mostremos la contención $\supseteq$.

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v =$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v,$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\|$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| <$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1,$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\|$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| <$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 =$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1| \, \|v\|$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1| \, \|v\| <$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1| \, \|v\| < r_1,$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1|\,\|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2|\,\|v\|$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1| \, \|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2| \, \|v\| <$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1|\,\|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2|\,\|v\| < r_2.$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1|\,\|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2|\,\|v\| < r_2.$$

Recordemos que $\|v\| < r_1 + r_2$.

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1| \, \|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2| \, \|v\| < r_2.$$

Recordemos que $\|v\| < r_1 + r_2$.

Es fácil adivinar una solución:

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1|\,\|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2|\,\|v\| < r_2.$$

Recordemos que $\|v\| < r_1 + r_2$.

Es fácil adivinar una solución:

$$\lambda_1 = \qquad\qquad \lambda_2 =$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1|\,\|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2|\,\|v\| < r_2.$$

Recordemos que $\|v\| < r_1 + r_2$.

Es fácil adivinar una solución:

$$\lambda_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2}, \qquad \lambda_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2}.$$

La suma de dos bolas en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$. Demostrar que

$$B(a_1, r_1) + B(a_2, r_2) = B(a_1 + a_2, r_1 + r_2).$$

El producto de un escalar por una bola en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que

$$\lambda\, B(a, r)$$

El producto de un escalar por una bola en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que

$$\lambda\, B(a, r) =$$

El producto de un escalar por una bola en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que

$$\lambda\, B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r).$$

El producto de un escalar por una bola en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que

$$\lambda\, B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r).$$

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Mostrar que

$$0\, B(a, r)$$

El producto de un escalar por una bola en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que

$$\lambda\, B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r).$$

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Mostrar que

$$0\, B(a, r) =$$

El producto de un escalar por una bola en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que

$$\lambda\, B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r).$$

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Mostrar que

$$0\, B(a, r) = \{0_V\}.$$

La diferencia de bolas en un espacio normado

Ejercicio. Encontrar

$$B(a_1, r_1) - B(a_2, r_2), \qquad B(0_V, r_1) - B(0_V, r_1).$$

Las bolas cubren el espacio normado

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo. Mostrar que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B(0_V, k) = \bigcup_{r>0} B(0_V, r) = V.$$

El interior de subespacios de un espacio normado

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que $\operatorname{int}(W) \neq \emptyset$. Demostrar que $W = V$.

El interior de subespacios de un espacio normado

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que $\operatorname{int}(W) \neq \emptyset$. Demostrar que $W = V$.

Sugerencia: primero demostrar que existe $r > 0$ tal que $B(0_V, r) \subseteq W$.

El interior de subespacios de un espacio normado

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que $\operatorname{int}(W) \neq \emptyset$. Demostrar que $W = V$.

Sugerencia: primero demostrar que existe $r > 0$ tal que $B(0_V, r) \subseteq W$.

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que $W \neq V$. Demostrar que $\operatorname{int}(W) = \emptyset$.