

Bolas en espacios normados y operaciones lineales

Objetivos. Definir bolas en espacios normados y estudiar sus propiedades elementales algebraicas: calcular la suma de dos bolas y el producto de una bola por un escalar.

Prerrequisitos. Norma, bolas en espacios métricos, operaciones lineales con subconjuntos de espacios vectoriales.

Sea V un espacio vectorial complejo normado. Denotamos por $\|\cdot\|$ a la norma en V y por d a la métrica inducida:

$$d(a, b) := \|a - b\| \quad (a, b \in V).$$

Dados a en V y $r > 0$, usamos la notación $B(a, r)$ para la bola con centro en a de radio r :

$$B(a, r) = \{v \in V : d(a, v) < r\} = \{v \in V : \|v - a\| < r\}.$$

Recordemos que si $X \subseteq V$, $a \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned} a + X &= \{v \in V : \exists u \in X \quad v = a + u\} = \{v \in V : v - a \in X\}, \\ \lambda X &= \{v \in V : \exists u \in X \quad v = \lambda u\} = \left\{v \in V : \frac{1}{\lambda}v \in X\right\}. \end{aligned}$$

1 Proposición. Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces

$$B(a, r) = a + rB(0, 1).$$

Demostración. Sea $v \in V$. Entonces

$$\begin{aligned} v \in a + rB(0, 1) &\iff v - a \in rB(0, 1) \iff \left\| \frac{1}{r}(v - a) \right\| < 1 \\ &\iff \frac{1}{r}\|v - a\| < 1 \iff \|v - a\| < r \iff v \in B(a, r). \quad \square \end{aligned}$$

2 Proposición. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces

$$\lambda B(0, 1) = B(0, |\lambda|).$$

3 Proposición. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces

$$\lambda B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda|r).$$

4 Proposición. Sean $r_1, r_2 > 0$. Entonces

$$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) = B(0_V, r_1 + r_2).$$

Demostración. Demostremos la contención \supseteq . Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Pongamos

$$u := \frac{r_1}{r_1 + r_2}v, \quad w := \frac{r_2}{r_1 + r_2}v.$$

Entonces $v = u + w$, $u \in B(0_V, r_1)$ y $w \in B(0_V, r_2)$. □

5 Proposición. Sean $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$. Entonces

$$B(a_1, r_1) + B(a_2, r_2) = B(a_1 + a_2, r_1 + r_2).$$

Demostración. Demostremos la contención \supseteq . Sea $x \in B(a_1 + a_2, r_1 + r_2)$. Pongamos $v := x - (a_1 + a_2)$. Entonces por la Proposición 4 existen u en $B(0_V, r_1)$ y w en $B(0_V, r_2)$ tales que $v = u + w$. Pongamos $y := a_1 + u$, $z := a_2 + w$. Entonces $y \in B(a_1, r_1)$, $z \in B(a_2, r_2)$, y $x = y + z$. □