Bolas abiertas en espacios métricos

Objetivos. Definir bolas en espacios métricos y demostrar sus propiedades elementales.

Prerrequisitos. Distancia, espacios métricos. Para resolver tareas adicionales es necesario conocer bien espacios normados y otros ejemplos de espacios métricos.

1 Definición (bola en un espacio métrico)**.** Sean (X, d) espacio métrico, $a \in X$, $r > 0$. Entonces el siguiente conjunto se llama la *bola abierta* (o simplemente *bola*) con centro a y radio r:

$$B(a, r) \coloneqq \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

2 Definición (bola cerrada en un espacio métrico)**.** Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$, $r > 0$. Entonces el siguiente conjunto se llama la *bola cerrada* con centro a y radio r:

$$\{x \in X : d(a, x) \le r\}. \tag{1}$$

Para este conjunto algunos autores utilizan la notación $\overline{B}(a, r)$ o $C(a, r)$.

Luego veremos que $C(a, r)$ no siempre es la cerradura de $B(a, r)$.

En esta sección vamos a estudiar solamente las bolas abiertas.

Propiedades principales de las bolas abiertas en espacios métricos

En las siguientes proposiciones suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

3 Proposición (sobre una bola contenida en otra)**.** *Sean $a, b \in X$ y $R, r > 0$ tales que $d(a, b) + r \le R$. Entonces*

$$B(b, r) \subseteq B(a, R).$$

Demostración. Sea $x \in B(b, r)$. Mostremos que $x \in B(a, R)$. Para acotar $d(a, x)$ por arriba, aplicamos la desigualdad del triángulo y la suposición que $d(a, b) + r \le R$:

$$d(a, x) \le d(a, b) + d(b, x) < d(a, b) + r \le R.$$

Hemos mostrado que $x \in B(a, R)$. $\square$

4 Proposición (sobre dos bolas disjuntas). *Sean* $a_1, a_2 \in X$ *y* $r_1, r_2 > 0$ *tales que* $r_1 + r_2 \le d(a_1, a_2)$. *Entonces*

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \varnothing.$$

Demostración. Supongamos que $x \in B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2)$. Entonces

$$d(a_1, a_2) \le d(a_1, x) + d(x, a_2) < r_1 + r_2,$$

lo que contradice a la hipótesis. □

5 Proposición (sobre dos bolas concéntricas). *Sean* $a \in X$ *y* $r_1, r_2 > 0$. *Entonces*

$$B(a, r_1) \cap B(a, r_2) = B(a, \min\{r_1, r_2\}).$$

Demostración. Para cualquier $x \in X$, la condición

$$d(a, x) < r_1 \qquad \wedge \qquad d(a, x) < r_2$$

es equivalente a la condición $d(a, x) < \min\{r_1, r_2\}$. □

¿Cuándo dos bolas se intersectan?

En los espacios normados (en particular, en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$) se puede demostrar la proposición recíproca a la Proposición 4 y así obtener un criterio (necesario y suficiente) para que dos bolas se intersecten. En espacios métricos generales este criterio no es válido.

6 Ejercicio (condición suficiente para que dos bolas en $\mathbb{R}$ intersecten). Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y sean $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 + r_2 > |a_1 - a_2|$. Demostrar que

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \ne \varnothing.$$

7 Ejercicio (condición suficiente para que dos bolas en un espacio normado intersecten). Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado real o complejo. Dotamos V con la distancia d inducida por la norma $\|\cdot\|$:

$$d(x, y) \coloneqq \|x - y\|.$$

Sean $a_1, a_2 \in V$ y sean $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 + r_2 > d(a_1, a_2)$. Demostrar que

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \ne \varnothing.$$

Sugerencia: construir un punto en $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2)$ como una combinación convexa de los puntos a_1 y a_2.

8 Ejercicio (construir un ejemplo con dos bolas que no intersectan aunque sus radios lo permiten)**.** Dar un ejemplo de un espacio métrico que no cumpla con la propiedad anterior. En otras palabras, hay que indicar un espacio métrico (X, d), puntos $a_1, a_2 \in X$ y radios $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 + r_2 > d(a_1, a_2)$ y

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \varnothing.$$

Ejemplo de una bola de radio más grande que está contenida en una bola de radio más pequeño

9 Ejemplo. Consideremos el intervalo cerrado $X = [-3, 3]$ con la métrica usual $d(x, y) = |x-y|$. En otras palabras, consideramos X como un subespacio métrico del espacio métrico $\mathbb{R}$. Entonces

$$B(0, 4) = [-3, 3], \qquad B(3, 5) = (-1, 3],$$

así que $B(3, 5) \subsetneq B(0, 4)$, aunque $5 > 4$.

10 Ejemplo. Otro ejemplo. Consideremos $X = \mathbb{R}$ con la siguiente métrica:

$$\rho(x, y) \coloneqq \begin{cases} 0, & x = y; \\ |x| + |y|, & x \neq y. \end{cases}$$

Es posible probar que (X, ρ) es un espacio métrico. Ahora notamos que

$$B(4, 7) = (-3, 3) \cup \{4\}, \qquad B(0, 5) = (-5, 5),$$

así que $B(4, 7) \subsetneq B(0, 5)$, aunque $5 < 7$.