Operadores autoadjuntos

Objetivos. Estudiar propiedades elementales de operadores autoadjuntos.

Prerrequisitos. Operador adjunto.

1 Definición. Sea H un espacio de Hilbert y sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Se dice que A es *autoadjunto* si $A = A^*$.

2 Observación. Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces la condición $A = A^*$ es equivalente a la condición que

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

para cualesquiera x, y en H. La última condición es en cierto sentido más constructiva y más fácil de verificar porque no utiliza el operador adjunto.

3 Proposición (criterio del operador autoadjunto en términos de los valores de la forma cuadrática asociada)**.** *Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces A es autoadjunto si, y sólo si, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cada x en H.*

Demostración. 1. Si $A = A^*$, entonces para cada x en H obtenemos que

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}.$$

2. Supongamos que $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cada x en H. Entonces para cada x en H tenemos

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle A^*x, x\rangle.$$

Usamos la identidad de polarización:

$$\langle Ax, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \langle A(x + \mathrm{i}^k\, y), x + \mathrm{i}^k\, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \langle A^*(x + \mathrm{i}^k\, y), x + \mathrm{i}^k\, y\rangle = \langle A^*x, y\rangle.$$

Luego $A = A^*$. □

4 Proposición (la norma del operador autoadjunto coincide con la norma de su forma cuadrática)**.** *Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que $A = A^*$. Entonces*

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in H\\ \|x\|=1}} |\langle Ax, x\rangle|.$$

Demostración. Denotemos el lado derecho por M. Si $\|x\| = 1$, entonces $|\langle Ax, x\rangle| \leq \|A\|$. Por eso $M \leq \|A\|$.

Por otro lado, es fácil ver que $|\langle Af, f\rangle| \leq M\|f\|^2$ para cada f en H. Sean $f, g \in H$ con $\|f\| = \|g\| = 1$.

$$\langle A(f+g), f+g\rangle = \langle Af, f\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle Af, g\rangle) + \langle Ag, g\rangle.$$

Aplicando esta identidad con $-g$ en lugar de g y restando dos igualdades, obtenemos

$$4\,\mathrm{Re}(\langle Af, g\rangle) = \langle A(f+g), f+g)\rangle - \langle A(f-g), f-g\rangle.$$

Luego por la ley de paralelogramo

$$4|\,\mathrm{Re}(\langle Af, g\rangle)| \leq M(\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2) = 2M(\|f\|^2 + \|g\|^2) \leq 4M,$$

así que

$$|\,\mathrm{Re}(\langle Af, g\rangle)| \leq M.$$

Escribimos $\langle Af, g\rangle$ como $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,|\langle Af, g\rangle|$ y aplicamos la desigualdad anterior con $\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta} f$ en vez de f. Entonces obtenemos que

$$|\langle Af, g\rangle| \leq M.$$

De aquí se sigue que $\|A\| \leq M$. $\square$