Operadores acotados autoadjuntos y sus espectros (un tema de la unidad “Operadores en espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

28 de julio de 2022

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo.

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo.

$\mathcal{B}(H) :=$ el conjunto de los operadores lineales acotados $H \to H$.

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo.

$\mathcal{B}(H) :=$ el conjunto de los operadores lineales acotados $H \to H$.

$\mathcal{B}_a(H) :=$ el conjunto de los operadores autoadjuntos (hermíticos):

$$\mathcal{B}_a(H) \;:=\; \left\{ A \in \mathcal{B}(H) \colon \;\; A^* = A \right\}.$$

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo.

$\mathcal{B}(H) :=$ el conjunto de los operadores lineales acotados $H \to H$.

$\mathcal{B}_a(H) :=$ el conjunto de los operadores autoadjuntos (hermíticos):

$$\mathcal{B}_a(H) \;:=\; \Big\{A \in \mathcal{B}(H) \colon \;\; A^* = A\Big\}.$$

Objetivo: estudiar las propiedades del espectro de A, cuando $A \in \mathcal{B}_a(H)$.

Prerrequisitos

- el operador adjunto en espacios de Hilbert;
- criterio de invertibilidad de los operadores normales;
- los operadores autoadjuntos y sus formas cuadráticas;
- la norma del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática.

1. Repaso de herramientas

2. El espectro del operador autoadjunto es real

3. El segmento que contiene al espectro del operador autoadjunto

4. El radio espectral del operador autoadjunto coincide con su norma

Plan

1. Repaso de herramientas
2. El espectro del operador autoadjunto es real
3. El segmento que contiene al espectro del operador autoadjunto
4. El radio espectral del operador autoadjunto coincide con su norma

Repaso: criterio de invertibilidad de los operadores normales

Un operador $S \in \mathcal{B}(H)$ se llama acotado por abajo, si existe $\gamma > 0$ tal que

$$\forall x \in H \qquad \|Sx\| \geq \gamma \|x\|.$$

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$ tal que $S\,S^* = S^*S$.

Entonces S es invertible $\Longleftrightarrow$ S es acotado por abajo.

Repaso: el criterio del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática

Para cada A en $\mathcal{B}(H)$, se define $q_A\colon H \to \mathbb{C}$,

$$q_A(x) := \langle Ax, x \rangle.$$

Repaso: el criterio del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática

Para cada A en $\mathcal{B}(H)$, se define $q_A\colon H \to \mathbb{C}$,

$$q_A(x) := \langle Ax, x\rangle.$$

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces

$$A \in \mathcal{B}_a(H) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\forall x \in H \quad q_A(x) \in \mathbb{R}\Big).$$

Repaso: la norma del operador autoadjunto en términos de los valores de su forma cuadrática

Para A en $\mathcal{B}_a(H)$, se definen

$$\|q_A\| := \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|x\|^2},$$

$$M_1(A) := \inf_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}, \qquad M_2(A) := \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$\|A\| = \|q_A\| = \max\Big\{ |M_1(A)|, |M_2(A)| \Big\}.$$

Plan

La norma de $\|Sx\|$ en términos de $\operatorname{Re}(S)$ e $\operatorname{Im}(S)$, cuando S es normal

Proposición

Sean $S \in \mathcal{B}(H)$, $x \in H$. Entonces

$$\|Sx\|^2 = \|\operatorname{Re}(S)x\|^2 + \|\operatorname{Im}(S)x\|^2.$$

Demostración

$$S = \operatorname{Re}(S) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(S), \qquad S^* = \operatorname{Re}(S) - \mathrm{i}\operatorname{Im}(S).$$

Demostración

$$S = \operatorname{Re}(S) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(S), \qquad S^* = \operatorname{Re}(S) - \mathrm{i}\operatorname{Im}(S).$$

Luego

$$S^*S = \operatorname{Re}(S)^2 - \mathrm{i}\operatorname{Re}(S)\operatorname{Im}(S) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(S)\operatorname{Re}(S) + \operatorname{Im}(S)^2.$$

Demostración

$$S = \operatorname{Re}(S) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(S), \qquad S^* = \operatorname{Re}(S) - \mathrm{i}\operatorname{Im}(S).$$

Luego

$$S^*S = \operatorname{Re}(S)^2 - \mathrm{i}\operatorname{Re}(S)\operatorname{Im}(S) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(S)\operatorname{Re}(S) + \operatorname{Im}(S)^2.$$

Como $\operatorname{Re}(S)$ conmuta con $\operatorname{Im}(S)$,

$$S^*S = \operatorname{Re}(S)^2 + \operatorname{Im}(S)^2.$$

Demostración

$$S = \operatorname{Re}(S) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(S), \qquad S^* = \operatorname{Re}(S) - \mathrm{i}\operatorname{Im}(S).$$

Luego

$$S^*S = \operatorname{Re}(S)^2 - \mathrm{i}\operatorname{Re}(S)\operatorname{Im}(S) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(S)\operatorname{Re}(S) + \operatorname{Im}(S)^2.$$

Como $\operatorname{Re}(S)$ conmuta con $\operatorname{Im}(S)$,

$$S^*S = \operatorname{Re}(S)^2 + \operatorname{Im}(S)^2.$$

Finalmente,

$$\|Sx\|^2 = \langle S^*Sx, x\rangle = \langle \operatorname{Re}(S)^2x, x\rangle + \langle \operatorname{Im}(S)^2x, x\rangle = \|\operatorname{Re}(S)x\|^2 + \|\operatorname{Im}(S)x\|^2.$$

Si A es normal, entonces $\lambda I - A$ es normal

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_n(H)$, esto es, $A^* A = A\, A^*$.

Pongamos $S := \lambda I - A$. Entonces $S \in \mathcal{B}_n(H)$.

Si A es normal, entonces $\lambda I - A$ es normal

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_n(H)$, esto es, $A^* A = A A^*$.

Pongamos $S := \lambda I - A$. Entonces $S \in \mathcal{B}_n(H)$.

Demostración.

$$S^* S$$

Si A es normal, entonces $\lambda I - A$ es normal

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_n(H)$, esto es, $A^* A = A A^*$.

Pongamos $S := \lambda I - A$. Entonces $S \in \mathcal{B}_n(H)$.

Demostración.

$$S^* S =$$

Si A es normal, entonces $\lambda I - A$ es normal

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_n(H)$, esto es, $A^* A = A A^*$.

Pongamos $S := \lambda I - A$. Entonces $S \in \mathcal{B}_n(H)$.

Demostración.

$$S^* S = (\overline{\lambda} I - A^*)(\lambda I - A)$$

Si A es normal, entonces $\lambda I - A$ es normal

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_n(H)$, esto es, $A^* A = A A^*$.

Pongamos $S := \lambda I - A$. Entonces $S \in \mathcal{B}_n(H)$.

Demostración.

$$S^* S = (\overline{\lambda} I - A^*)(\lambda I - A) =$$

Si A es normal, entonces $\lambda I - A$ es normal

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_n(H)$, esto es, $A^* A = A\, A^*$.

Pongamos $S := \lambda I - A$. Entonces $S \in \mathcal{B}_n(H)$.

Demostración.

$$S^* S = (\overline{\lambda} I - A^*)(\lambda I - A) = |\lambda|^2 I - \lambda A^* - \overline{\lambda} A + A^* A,$$

Si A es normal, entonces $\lambda I - A$ es normal

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_n(H)$, esto es, $A^* A = A\,A^*$.

Pongamos $S := \lambda I - A$. Entonces $S \in \mathcal{B}_n(H)$.

Demostración.

$$S^* S = (\overline{\lambda} I - A^*)(\lambda I - A) = |\lambda|^2 I - \lambda A^* - \overline{\lambda} A + A^* A,$$

$$S\,S^*$$

Si A es normal, entonces $\lambda I - A$ es normal

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_n(H)$, esto es, $A^* A = A\,A^*$.

Pongamos $S := \lambda I - A$. Entonces $S \in \mathcal{B}_n(H)$.

Demostración.

$$S^* S = (\overline{\lambda} I - A^*)(\lambda I - A) = |\lambda|^2 I - \lambda A^* - \overline{\lambda} A + A^* A,$$

$$S\,S^* =$$

Si A es normal, entonces $\lambda I - A$ es normal

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_n(H)$, esto es, $A^* A = A\, A^*$.

Pongamos $S := \lambda I - A$. Entonces $S \in \mathcal{B}_n(H)$.

Demostración.

$$S^* S = (\overline{\lambda} I - A^*)(\lambda I - A) = |\lambda|^2 I - \lambda A^* - \overline{\lambda} A + A^* A,$$

$$S\, S^* = (\lambda I - A)(\overline{\lambda} I - A^*)$$

Si A es normal, entonces $\lambda I - A$ es normal

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_n(H)$, esto es, $A^* A = A\, A^*$.

Pongamos $S := \lambda I - A$. Entonces $S \in \mathcal{B}_n(H)$.

Demostración.

$$S^* S = (\overline{\lambda} I - A^*)(\lambda I - A) = |\lambda|^2 I - \lambda A^* - \overline{\lambda} A + A^* A,$$

$$S\, S^* = (\lambda I - A)(\overline{\lambda} I - A^*) =$$

Si A es normal, entonces $\lambda I - A$ es normal

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_n(H)$, esto es, $A^*A = A\,A^*$.

Pongamos $S := \lambda I - A$. Entonces $S \in \mathcal{B}_n(H)$.

Demostración.

$$S^*S = (\overline{\lambda}I - A^*)(\lambda I - A) = |\lambda|^2 I - \lambda A^* - \overline{\lambda}A + A^*A,$$

$$S\,S^* = (\lambda I - A)(\overline{\lambda}I - A^*) = |\lambda|^2 I - \lambda A^* - \overline{\lambda}A + A\,A^*.$$

Si A es normal, entonces $\lambda I - A$ es normal

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_n(H)$, esto es, $A^* A = A\,A^*$.

Pongamos $S := \lambda I - A$. Entonces $S \in \mathcal{B}_n(H)$.

Demostración.

$$S^* S = (\overline{\lambda} I - A^*)(\lambda I - A) = |\lambda|^2 I - \lambda A^* - \overline{\lambda} A + A^* A,$$

$$S\,S^* = (\lambda I - A)(\overline{\lambda} I - A^*) = |\lambda|^2 I - \lambda A^* - \overline{\lambda} A + A\,A^*.$$

Concluimos que $S^* S = S\,S^*$.

El espectro del operador autoadjunto es real

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$\mathrm{sp}(A) \subseteq \mathbb{R}.$$

Demostración, inicio

Sea $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$.

Demostración, inicio

Sea $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$. Esto significa que $S := \lambda I - A$ es no invertible.

Demostración, inicio

Sea $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$. Esto significa que $S := \lambda I - A$ es no invertible.

Descomponemos λ en su parte real e imaginaria:

$$\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Demostración, inicio

Sea $\lambda \in \operatorname{sp}(A)$. Esto significa que $S := \lambda I - A$ es no invertible.

Descomponemos λ en su parte real e imaginaria:

$$\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$S = (\alpha I - A) - \mathrm{i}\,\beta I.$$

Demostración, inicio

Sea $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$. Esto significa que $S := \lambda I - A$ es no invertible.

Descomponemos λ en su parte real e imaginaria:

$$\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$S = (\alpha I - A) - \mathrm{i}\,\beta I.$$

Notamos que $\alpha I - A \in \mathcal{B}_a(H)$, $-\beta I \in \mathcal{B}_a(H)$. Luego

$$\alpha I - A = \mathrm{Re}(S), \qquad -\beta I = \mathrm{Im}(S).$$

Demostración, final

Para cada x en H,

$$\|Sx\|^2 = \|(\alpha I - A)x\|^2 + \|(-\beta I)x\|^2 \geq \|(-\beta I)x\|^2 = \beta^2 \|x\|^2.$$

Demostración, final

Para cada x en H,

$$\|Sx\|^2 = \|(\alpha I - A)x\|^2 + \|(-\beta I)x\|^2 \geq \|(-\beta I)x\|^2 = \beta^2 \|x\|^2.$$

Por lo tanto,

$$\|Sx\| \geq |\beta| \, \|x\|.$$

Demostración, final

Para cada x en H,

$$\|Sx\|^2 = \|(\alpha I - A)x\|^2 + \|(-\beta I)x\|^2 \geq \|(-\beta I)x\|^2 = \beta^2 \|x\|^2.$$

Por lo tanto,

$$\|Sx\| \geq |\beta| \, \|x\|.$$

Si $\beta \neq 0$, entonces S es acotado por abajo y luego invertible.

Demostración, final

Para cada x en H,

$$\|Sx\|^2 = \|(\alpha I - A)x\|^2 + \|(-\beta I)x\|^2 \geq \|(-\beta I)x\|^2 = \beta^2 \|x\|^2.$$

Por lo tanto,

$$\|Sx\| \geq |\beta| \|x\|.$$

Si $\beta \neq 0$, entonces S es acotado por abajo y luego invertible.

Esto contradice a la suposición.

Plan

El segmento que contiene al espectro del operador autoadjunto

$$M_1(A) := \inf_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}, \qquad M_2(A) := \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$\mathrm{sp}(S) \subseteq \Big[M_1(A), M_2(A) \Big].$$

Demostración

Sea $\lambda > M_2(A)$. Pongamos $S := \lambda I - A$ y mostremos que S es acotado por abajo.

Demostración

Sea $\lambda > M_2(A)$. Pongamos $S := \lambda I - A$ y mostremos que S es acotado por abajo.

Por la definición de $M_2(A)$, para cada x en H,

$$\langle Ax, x\rangle \leq M_2(A)\,\|x\|^2.$$

Demostración

Sea $\lambda > M_2(A)$. Pongamos $S := \lambda I - A$ y mostremos que S es acotado por abajo.

Por la definición de $M_2(A)$, para cada x en H,

$$\langle Ax, x \rangle \leq M_2(A) \, \|x\|^2.$$

Luego

$$\|Sx\| \, \|x\| \geq \langle Sx, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \geq (\lambda - M_2(A)) \, \|x\|^2.$$

Demostración

Sea $\lambda > M_2(A)$. Pongamos $S := \lambda I - A$ y mostremos que S es acotado por abajo.

Por la definición de $M_2(A)$, para cada x en H,

$$\langle Ax, x\rangle \leq M_2(A)\,\|x\|^2.$$

Luego

$$\|Sx\|\,\|x\| \geq \langle Sx, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle - \langle Ax, x\rangle \geq (\lambda - M_2(A))\,\|x\|^2.$$

Luego $\|Sx\| \geq (\lambda - M_2(A))\,\|x\|$.

Demostración

Ejercicio. Completar la demostración.

Suponer que $\lambda < M_1(A)$ y demostrar que $\lambda I - A$ es acotado por abajo.

Plan

El supremo del cociente de Rayleigh del operador positivo

A partir de este momento, vamos a suponer que $H \neq \{0_H\}$.

El supremo del cociente de Rayleigh del operador positivo

A partir de este momento, vamos a suponer que $H \neq \{0_H\}$.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$ tal que $q_A(x) \geq 0$ para cada x en H. Entonces

$$\|A\| = M_2(x) \in \mathrm{sp}(A).$$

El supremo del cociente de Rayleigh del operador positivo

A partir de este momento, vamos a suponer que $H \neq \{0_H\}$.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$ tal que $q_A(x) \geq 0$ para cada x en H. Entonces

$$\|A\| = M_2(x) \in \mathrm{sp}(A).$$

Observación sobre el enunciado.

Ya sabemos que $\|A\| = \max\{|M_1(A)|, |M_2(A)|\}$.

En el caso de la proposición, $\|A\| = M_2(A)$.

Por brevedad, en la demostración denotamos $M_2(A)$ por ξ.

Demostración

Usando la definición de ξ encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| = 1, \qquad \langle Au_n, u_n\rangle \geq \xi - \frac{1}{n}.$$

Demostración

Usando la definición de ξ encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| = 1, \qquad \langle Au_n, u_n\rangle \geq \xi - \frac{1}{n}.$$

Notamos que $\|Au_n\| \leq \|A\| = \xi$.

Demostración

Usando la definición de ξ encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| = 1, \qquad \langle Au_n, u_n\rangle \geq \xi - \frac{1}{n}.$$

Notamos que $\|Au_n\| \leq \|A\| = \xi$. Luego

$$\|(A - \xi I)u_n\|^2$$

Demostración

Usando la definición de ξ encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| = 1, \qquad \langle Au_n, u_n\rangle \geq \xi - \frac{1}{n}.$$

Notamos que $\|Au_n\| \leq \|A\| = \xi$. Luego

$$\|(A - \xi I)u_n\|^2 =$$

Demostración

Usando la definición de ξ encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| = 1, \qquad \langle Au_n, u_n\rangle \geq \xi - \frac{1}{n}.$$

Notamos que $\|Au_n\| \leq \|A\| = \xi$. Luego

$$\|(A - \xi I)u_n\|^2 = \langle Au_n - \xi u_n, Au_n - \xi u_n\rangle$$

Demostración

Usando la definición de ξ encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| = 1, \qquad \langle Au_n, u_n\rangle \geq \xi - \frac{1}{n}.$$

Notamos que $\|Au_n\| \leq \|A\| = \xi$. Luego

$$\begin{aligned}\|(A-\xi I)u_n\|^2 &= \langle Au_n - \xi u_n, Au_n - \xi u_n\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Demostración

Usando la definición de ξ encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| = 1, \qquad \langle Au_n, u_n\rangle \geq \xi - \frac{1}{n}.$$

Notamos que $\|Au_n\| \leq \|A\| = \xi$. Luego

$$\begin{aligned}\|(A-\xi I)u_n\|^2 &= \langle Au_n - \xi u_n, Au_n - \xi u_n\rangle \\ &= \|Au_n\|^2 - 2\xi\langle Au_n, u_n\rangle + \xi^2\|u_n\|^2\end{aligned}$$

Demostración

Usando la definición de ξ encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| = 1, \qquad \langle Au_n, u_n\rangle \geq \xi - \frac{1}{n}.$$

Notamos que $\|Au_n\| \leq \|A\| = \xi$. Luego

$$\begin{aligned} \|(A-\xi I)u_n\|^2 &= \langle Au_n - \xi u_n, Au_n - \xi u_n\rangle \\ &= \|Au_n\|^2 - 2\xi\langle Au_n, u_n\rangle + \xi^2\|u_n\|^2 \\ &\leq \end{aligned}$$

Demostración

Usando la definición de ξ encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| = 1, \qquad \langle Au_n, u_n\rangle \geq \xi - \frac{1}{n}.$$

Notamos que $\|Au_n\| \leq \|A\| = \xi$. Luego

$$\begin{aligned}
\|(A-\xi I)u_n\|^2 &= \langle Au_n - \xi u_n, Au_n - \xi u_n\rangle \\
&= \|Au_n\|^2 - 2\xi\langle Au_n, u_n\rangle + \xi^2\|u_n\|^2 \\
&\leq \xi^2 - 2\xi\left(\xi - \frac{1}{n}\right) + \xi^2
\end{aligned}$$

Demostración

Usando la definición de ξ encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| = 1, \qquad \langle Au_n, u_n\rangle \geq \xi - \frac{1}{n}.$$

Notamos que $\|Au_n\| \leq \|A\| = \xi$. Luego

$$\begin{aligned}
\|(A - \xi I)u_n\|^2 &= \langle Au_n - \xi u_n, Au_n - \xi u_n\rangle \\
&= \|Au_n\|^2 - 2\xi\langle Au_n, u_n\rangle + \xi^2\|u_n\|^2 \\
&\leq \xi^2 - 2\xi\left(\xi - \frac{1}{n}\right) + \xi^2 =
\end{aligned}$$

Demostración

Usando la definición de ξ encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| = 1, \qquad \langle Au_n, u_n\rangle \geq \xi - \frac{1}{n}.$$

Notamos que $\|Au_n\| \leq \|A\| = \xi$. Luego

$$\begin{aligned}
\|(A - \xi I)u_n\|^2 &= \langle Au_n - \xi u_n, Au_n - \xi u_n\rangle \\
&= \|Au_n\|^2 - 2\xi\langle Au_n, u_n\rangle + \xi^2\|u_n\|^2 \\
&\leq \xi^2 - 2\xi\left(\xi - \frac{1}{n}\right) + \xi^2 = \frac{2\xi}{n}.
\end{aligned}$$

Demostración

Usando la definición de ξ encontramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| = 1, \qquad \langle Au_n, u_n\rangle \geq \xi - \frac{1}{n}.$$

Notamos que $\|Au_n\| \leq \|A\| = \xi$. Luego

$$\begin{aligned} \|(A - \xi I)u_n\|^2 &= \langle Au_n - \xi u_n, Au_n - \xi u_n\rangle \\ &= \|Au_n\|^2 - 2\xi\langle Au_n, u_n\rangle + \xi^2\|u_n\|^2 \\ &\leq \xi^2 - 2\xi\left(\xi - \frac{1}{n}\right) + \xi^2 = \frac{2\xi}{n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A - \xi I_n$ no es acotado por abajo.

Repaso: el espectro del operador dilatado y desplazado

Proposición

Sean $A \in \mathcal{B}(H)$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\mathrm{sp}(\xi A + \eta I) = \xi\,\mathrm{sp}(A) + \eta.$$

Repaso: el espectro del operador dilatado y desplazado

Proposición

Sean $A \in \mathcal{B}(H)$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\mathrm{sp}(\xi A + \eta I) = \xi\,\mathrm{sp}(A) + \eta.$$

Ejercicio. Si no han demostrado esta proposición, se recomienda demostrarla.

Es suficiente aplicar bien la definición del espectro.

El comportamiento de $M_1(A)$ y $M_2(A)$ al desplazar el operador A

Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$ y sea $\eta \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$M_1(A + \eta I) = M_1(A) + \eta, \qquad M_2(A + \eta I) = M_2(A) + \eta.$$

El comportamiento de $M_1(A)$ y $M_2(A)$ al desplazar el operador A

Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$ y sea $\eta \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$M_1(A + \eta I) = M_1(A) + \eta, \qquad M_2(A + \eta I) = M_2(A) + \eta.$$

Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Demostrar que

$$M_1(-A) = -M_2(A), \qquad M_2(-A) = -M_1(A).$$

El ínfimo y el supremo del cociente de Rayleigh pertenecen al espectro

El ínfimo y el supremo del cociente de Rayleigh pertenecen al espectro

Teorema

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$M_1(A) \in \mathrm{sp}(A), \qquad M_2(A) \in \mathrm{sp}(A).$$

Demostración que $M_2(A) \in \mathrm{sp}(A)$

Pongamos $\eta := -M_1(A)$, $S := A + \eta I$.

Demostración que $M_2(A) \in \mathrm{sp}(A)$

Pongamos $\eta := -M_1(A)$, $S := A + \eta I$.

Entonces $S^* = S$,

$$M_1(S) = M_1(A) - M_1(A) = 0, \qquad M_2(S) = M_2(A) - M_1(A) \geq 0.$$

Demostración que $M_2(A) \in \operatorname{sp}(A)$

Pongamos $\eta := -M_1(A)$, $S := A + \eta I$.

Entonces $S^* = S$,

$$M_1(S) = M_1(A) - M_1(A) = 0, \qquad M_2(S) = M_2(A) - M_1(A) \geq 0.$$

Ya sabemos que en esta situación $M_2(S) \in \operatorname{sp}(S)$.

Demostración que $M_2(A) \in \mathrm{sp}(A)$

Pongamos $\eta := -M_1(A)$, $S := A + \eta I$.

Entonces $S^* = S$,

$$M_1(S) = M_1(A) - M_1(A) = 0, \qquad M_2(S) = M_2(A) - M_1(A) \geq 0.$$

Ya sabemos que en esta situación $M_2(S) \in \mathrm{sp}(S)$.

Como $A = S + M_1(A)$,

$$M_2(A) = M_2(S) + M_1(A) \in \mathrm{sp}(A).$$

Idea de demostración que $M_1(A) \in \mathrm{sp}(A)$

Ejercicio.

Idea de demostración que $M_1(A) \in \operatorname{sp}(A)$

Ejercicio.

Considerar $T := M_2(A)I - A$.

Idea de demostración que $M_1(A) \in \operatorname{sp}(A)$

Ejercicio.

Considerar $T := M_2(A)I - A$.

Mostrar que $T^* = T$, $M_1(T) = 0$, $M_2(T) = M_2(A) - M_1(A)$.

Idea de demostración que $M_1(A) \in \mathrm{sp}(A)$

Ejercicio.

Considerar $T := M_2(A)I - A$.

Mostrar que $T^* = T$, $M_1(T) = 0$, $M_2(T) = M_2(A) - M_1(A)$.

Justificar que $M_2(A) - M_1(A) \in \mathrm{sp}(T)$.

Idea de demostración que $M_1(A) \in \mathrm{sp}(A)$

Ejercicio.

Considerar $T := M_2(A)I - A$.

Mostrar que $T^* = T$, $M_1(T) = 0$, $M_2(T) = M_2(A) - M_1(A)$.

Justificar que $M_2(A) - M_1(A) \in \mathrm{sp}(T)$.

Luego demostrar que $M_1(A) \in \mathrm{sp}(A)$.

El radio espectral del operador autoadjunto coincide con su norma

$$r(A) \ := \ \sup\Big\{|\lambda|: \ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\Big\}.$$

El radio espectral del operador autoadjunto coincide con su norma

$$r(A) \;:=\; \sup\left\{|\lambda|:\;\; \lambda \in \mathrm{sp}(A)\right\}.$$

Corolario

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$r(A) = \max\left\{|M_1(A)|, |M_2(A)|\right\} = \|A\|.$$

El radio espectral del operador autoadjunto coincide con su norma

$$r(A) \;:=\; \sup\Big\{|\lambda|:\;\; \lambda \in \operatorname{sp}(A)\Big\}.$$

Corolario

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$r(A) = \max\Big\{|M_1(A)|, |M_2(A)|\Big\} = \|A\|.$$

Demostración. Sale de las propiedades que hemos demostrado:

$$\operatorname{sp}(A) \subseteq \big[M_1(A), M_2(A)\big], \qquad M_1(A) \in \operatorname{sp}(A), \qquad M_2(A) \in \operatorname{sp}(A).$$