Operadores acotados autoadjuntos y sus formas cuadráticas (un tema de la unidad "Operadores en espacios de Hilbert")

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

28 de julio de 2022

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo.

Denotamos por $\mathcal{B}(H)$ al conjunto de los operadores lineales acotados $H \to H$.

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo.

Denotamos por $\mathcal{B}(H)$ al conjunto de los operadores lineales acotados $H \to H$.

Definición

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Se dice que A es autoadjunto o hermítico, si

$$A^* = A.$$

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo.

Denotamos por $\mathcal{B}(H)$ al conjunto de los operadores lineales acotados $H \to H$.

Definición

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Se dice que A es autoadjunto o hermítico, si

$$A^* = A.$$

Objetivo: estudiar algunas propiedades elementales de operadores autoadjuntos, especialmente la relación entre estos operadores y sus formas cuadráticas.

Prerrequisitos

- el operador adjunto en espacios de Hilbert;
- correspondencia entre los operadores y sus formas cuadráticas;
- la identidad de polarización.

1. El conjunto de los operadores autoadjuntos
2. Criterio del operador autoadjunto en términos de su forma sesquilineal
3. Criterio del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática
4. La norma del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática

Plan

1. El conjunto de los operadores autoadjuntos
2. Criterio del operador autoadjunto en términos de su forma sesquilineal
3. Criterio del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática
4. La norma del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática

El conjunto de los operadores autoadjuntos

$$\mathcal{B}_a(H) := \Big\{ A \in \mathcal{B}(H) : \ A^* = A \Big\}.$$

El conjunto de los operadores autoadjuntos

$$\mathcal{B}_a(H) \;:=\; \Big\{A \in \mathcal{B}(H) : \;\; A^* = A\Big\}.$$

Ejercicio. Demostrar que $\mathcal{B}_a(H)$ es un subespacio vectorial real de $\mathcal{B}(H)$.

El conjunto de los operadores autoadjuntos

$$\mathcal{B}_a(H) \;:=\; \Big\{ A \in \mathcal{B}(H) \colon\; A^* = A \Big\}.$$

Ejercicio. Demostrar que $\mathcal{B}_a(H)$ es un subespacio vectorial real de $\mathcal{B}(H)$.

Ejercicio. Demostrar que $\mathcal{B}_a(H)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}(H)$.

El conjunto de los operadores autoadjuntos

$$\mathcal{B}_a(H) \ := \ \Big\{A \in \mathcal{B}(H): \ A^* = A\Big\}.$$

Ejercicio. Demostrar que $\mathcal{B}_a(H)$ es un subespacio vectorial real de $\mathcal{B}(H)$.

Ejercicio. Demostrar que $\mathcal{B}_a(H)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}(H)$.

Ejercicio. Demostrar que si $S \in \mathcal{B}_a(H)$, entonces S es normal.

La parte real y la parte imaginaria del operador

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, pongamos

$$\operatorname{Re}(S) := \frac{S + S^*}{2}, \qquad \operatorname{Im}(S) := \frac{S - S^*}{2\,\mathrm{i}}.$$

La parte real y la parte imaginaria del operador

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, pongamos

$$\operatorname{Re}(S) := \frac{S + S^*}{2}, \qquad \operatorname{Im}(S) := \frac{S - S^*}{2\,\mathrm{i}}.$$

Ejercicio. Mostrar que

$$S = \operatorname{Re}(S) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(S), \qquad \operatorname{Re}(S), \operatorname{Im}(S) \in \mathcal{B}_a(H).$$

La parte real y la parte imaginaria del operador

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, pongamos

$$\operatorname{Re}(S) := \frac{S + S^*}{2}, \qquad \operatorname{Im}(S) := \frac{S - S^*}{2\,\mathrm{i}}.$$

Ejercicio. Mostrar que

$$S = \operatorname{Re}(S) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(S), \qquad \operatorname{Re}(S), \operatorname{Im}(S) \in \mathcal{B}_a(H).$$

Ejercicio. Mostrar que si $S = T + \mathrm{i}\,U$, donde $T, U \in \mathcal{B}_a(H)$, entonces

$$T = \operatorname{Re}(S), \qquad U = \operatorname{Im}(S).$$

Un criterio trivial de operadores autoadjuntos (acotados)

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces $A^* = A$ si, y sólo si,

$$\forall x, y \in H \qquad \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

Un criterio trivial de operadores autoadjuntos (acotados)

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces $A^* = A$ si, y sólo si,

$$\forall x, y \in H \qquad \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

Ejercicio. Recordar la definición del operador adjunto y demostrar la proposición.

Plan

1. El conjunto de los operadores autoadjuntos
2. Criterio del operador autoadjunto en términos de su forma sesquilineal
3. Criterio del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática
4. La norma del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática

Repaso: la forma sesquilineal asociada al operador lineal acotado

$\mathcal{S}(H) :=$ el espacio de las formas sesquilineales acotadas.

Repaso: la forma sesquilineal asociada al operador lineal acotado

$\mathcal{S}(H) :=$ el espacio de las formas sesquilineales acotadas.

Dado A en $\mathcal{B}(H)$, se define $f_A \in \mathcal{S}(H)$,

$$f_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

Repaso: la forma sesquilineal asociada al operador lineal acotado

$\mathcal{S}(H) :=$ el espacio de las formas sesquilineales acotadas.

Dado A en $\mathcal{B}(H)$, se define $f_A \in \mathcal{S}(H)$,

$$f_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

Sabemos que $\|f_A\| = \|A\|$ y que la correspondencia $A \mapsto f_A$ es inyectiva.

Criterio del operador autoadjunto en términos de la forma sesquilineal asociada

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, definimos $g^*\colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$g^*(x, y) := \overline{g(y, x)}.$$

Criterio del operador autoadjunto en términos de la forma sesquilineal asociada

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, definimos $g^*\colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$g^*(x, y) := \overline{g(y, x)}.$$

Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces

$$A^* = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_A^* = f_A.$$

Plan

1. El conjunto de los operadores autoadjuntos
2. Criterio del operador autoadjunto en términos de su forma sesquilineal
3. Criterio del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática
4. La norma del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática

La forma cuadrática asociada al operador lineal acotado

Dado A en $\mathcal{B}(H)$, se define $q_A\colon H \to \mathbb{C}$,

$$q_A(x) := f_A(x, x).$$

Repaso: la identidad de polarización para las formas sesqulineales

Sea $g \in \mathcal{S}(H)$. Entonces para cada x, y en H

$$g(x, y)$$

Repaso: la identidad de polarización para las formas sesqulineales

Sea $g \in \mathcal{S}(H)$. Entonces para cada x, y en H

$$g(x, y) =$$

Repaso: la identidad de polarización para las formas sesqulineales

Sea $g \in \mathcal{S}(H)$. Entonces para cada x, y en H

$$g(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, g(x + \mathrm{i}^k \, y, x + \mathrm{i}^k \, y).$$

Repaso: la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva

Proposición

Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(H)$ tales que $g_1(v, v) = g_2(v, v)$ para cada v en H. Entonces $g_1 = g_2$.

Repaso: la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva

Proposición

Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(H)$ tales que $g_1(v, v) = g_2(v, v)$ para cada v en H. Entonces $g_1 = g_2$.

Demostración.

$$g_1(x, y)$$

Repaso: la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva

Proposición

Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(H)$ tales que $g_1(v, v) = g_2(v, v)$ para cada v en H. Entonces $g_1 = g_2$.

Demostración.

$$g_1(x, y) =$$

Repaso: la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva

Proposición

Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(H)$ tales que $g_1(v, v) = g_2(v, v)$ para cada v en H. Entonces $g_1 = g_2$.

Demostración.

$$g_1(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, g_1(x + \mathrm{i}^k \, y, x + \mathrm{i}^k \, y)$$

Repaso: la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva

Proposición

Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(H)$ tales que $g_1(v, v) = g_2(v, v)$ para cada v en H. Entonces $g_1 = g_2$.

Demostración.

$$g_1(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, g_1(x + \mathrm{i}^k \, y, x + \mathrm{i}^k \, y) =$$

Repaso: la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva

Proposición

Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(H)$ tales que $g_1(v, v) = g_2(v, v)$ para cada v en H. Entonces $g_1 = g_2$.

Demostración.

$$g_1(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, g_1(x + \mathrm{i}^k \, y, x + \mathrm{i}^k \, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, g_2(x + \mathrm{i}^k \, y, x + \mathrm{i}^k \, y)$$

Repaso: la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva

Proposición

Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(H)$ tales que $g_1(v, v) = g_2(v, v)$ para cada v en H. Entonces $g_1 = g_2$.

Demostración.

$$g_1(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, g_1(x + \mathrm{i}^k \, y, x + \mathrm{i}^k \, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, g_2(x + \mathrm{i}^k \, y, x + \mathrm{i}^k \, y) =$$

Repaso: la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva

Proposición

Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(H)$ tales que $g_1(v, v) = g_2(v, v)$ para cada v en H. Entonces $g_1 = g_2$.

Demostración.

$$g_1(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, g_1(x + \mathrm{i}^k \, y, x + \mathrm{i}^k \, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, g_2(x + \mathrm{i}^k \, y, x + \mathrm{i}^k \, y) = g_2(x, y).$$

Repaso: la correspondencia entre los operadores y sus formas cuadráticas es inyectiva

Proposición

Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$ tales que $q_S = q_T$. Entonces $S = T$.

Repaso: la correspondencia entre los operadores y sus formas cuadráticas es inyectiva

Proposición

Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$ tales que $q_S = q_T$. Entonces $S = T$.

Demostración.

Repaso: la correspondencia entre los operadores y sus formas cuadráticas es inyectiva

Proposición

Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$ tales que $q_S = q_T$. Entonces $S = T$.

Demostración.

Por la identidad de polarización, $f_S = f_T$.

Repaso: la correspondencia entre los operadores y sus formas cuadráticas es inyectiva

Proposición

Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$ tales que $q_S = q_T$. Entonces $S = T$.

Demostración.

Por la identidad de polarización, $f_S = f_T$.

Luego $S = T$.

Criterio del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces A es autoadjunto si, y sólo si,

$$\forall x \in H \qquad \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}.$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x)$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) =$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle =$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle =$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} =$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{q_A(x)}.$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{q_A(x)}.$$

Otra forma de escribir este razonamiento:

$$q_A(x)$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{q_A(x)}.$$

Otra forma de escribir este razonamiento:

$$q_A(x) =$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{q_A(x)}.$$

Otra forma de escribir este razonamiento:

$$q_A(x) = f_A(x, x)$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{q_A(x)}.$$

Otra forma de escribir este razonamiento:

$$q_A(x) = f_A(x, x) =$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{q_A(x)}.$$

Otra forma de escribir este razonamiento:

$$q_A(x) = f_A(x, x) = f_A^*(x, x)$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{q_A(x)}.$$

Otra forma de escribir este razonamiento:

$$q_A(x) = f_A(x, x) = f_A^*(x, x) =$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{q_A(x)}.$$

Otra forma de escribir este razonamiento:

$$q_A(x) = f_A(x, x) = f_A^*(x, x) = \overline{f_A(x, x)}$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{q_A(x)}.$$

Otra forma de escribir este razonamiento:

$$q_A(x) = f_A(x, x) = f_A^*(x, x) = \overline{f_A(x, x)} =$$

Demostración, necesidad

Supongamos que $A^* = A$.

Entonces para cada x en H

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{q_A(x)}.$$

Otra forma de escribir este razonamiento:

$$q_A(x) = f_A(x, x) = f_A^*(x, x) = \overline{f_A(x, x)} = \overline{q_A(x)}.$$

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x)$$

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x) =$$

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x) = \langle A^* x, x \rangle$$

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x) = \langle A^* x, x \rangle =$$

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x) = \langle A^* x, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$$

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x) = \langle A^* x, x \rangle = \langle x, Ax \rangle =$$

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x) = \langle A^* x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$$

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x) = \langle A^* x, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} =$$

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x) = \langle A^*x, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{q_A(x)}$$

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x) = \langle A^* x, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{q_A(x)} =$$

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x) = \langle A^* x, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{q_A(x)} = q_A(x).$$

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x) = \langle A^* x, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{q_A(x)} = q_A(x).$$

Sabemos que la correspondencia entre los operadores y sus formas cuadráticas es inyectiva.

Demostración, suficiencia

Supongamos que $q_A(x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

Entonces para cada x en H tenemos

$$q_{A^*}(x) = \langle A^* x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{q_A(x)} = q_A(x).$$

Sabemos que la correspondencia entre los operadores y sus formas cuadráticas es inyectiva.

Por lo tanto, $A^* = A$.

Plan

1. El conjunto de los operadores autoadjuntos
2. Criterio del operador autoadjunto en términos de su forma sesquilineal
3. Criterio del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática
4. La norma del operador autoadjunto en términos de su forma cuadrática

El cociente de Rayleigh

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ y sea $x \in H \setminus \{0_H\}$.

La siguiente expresión se conoce como el cociente de Rayleigh:

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

El cociente de Rayleigh

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ y sea $x \in H \setminus \{0_H\}$.

La siguiente expresión se conoce como el cociente de Rayleigh:

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

Ejercicio. Sea v un vector propio de A. Demostrar que su valor propio asociado es

$$\lambda = \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|^2}.$$

Fórmula para la parte real de la forma sesquilineal asociada al operador autoadjunto

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$4\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) = \langle A(x+y), x+y)\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle.$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y \rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y) \rangle$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle =$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle +$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y \rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle +$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle +$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y))\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Transformamos el tercer sumando usando la suposición que $A^* = A$:

$$\langle Ay, x\rangle$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Transformamos el tercer sumando usando la suposición que $A^* = A$:

$$\langle Ay, x\rangle =$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y \rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Transformamos el tercer sumando usando la suposición que $A^* = A$:

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Transformamos el tercer sumando usando la suposición que $A^* = A$:

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle =$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Transformamos el tercer sumando usando la suposición que $A^* = A$:

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle}.$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Transformamos el tercer sumando usando la suposición que $A^* = A$:

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle}.$$

Como $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, obtenemos

$$\langle A(x+y), x+y\rangle$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Transformamos el tercer sumando usando la suposición que $A^* = A$:

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle}.$$

Como $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, obtenemos

$$\langle A(x+y), x+y\rangle =$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Transformamos el tercer sumando usando la suposición que $A^* = A$:

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle}.$$

Como $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, obtenemos

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Transformamos el tercer sumando usando la suposición que $A^* = A$:

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle}.$$

Como $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, obtenemos

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle +$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Transformamos el tercer sumando usando la suposición que $A^* = A$:

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle}.$$

Como $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, obtenemos

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle)$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y)\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Transformamos el tercer sumando usando la suposición que $A^* = A$:

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle}.$$

Como $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, obtenemos

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) +$$

Demostración, inicio

Expandimos $\langle A(x+y), x+y\rangle$:

$$\langle A(x+y), x+y))\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle.$$

Transformamos el tercer sumando usando la suposición que $A^* = A$:

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle}.$$

Como $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, obtenemos

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Demostración, final

Hemos mostrado que

$$\langle A(x+y), x+y\rangle$$

Demostración, final

Hemos mostrado que

$$\langle A(x+y), x+y\rangle =$$

Demostración, final

Hemos mostrado que

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Demostración, final

Hemos mostrado que

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Sustituimos $-y$ en lugar de y:

$$\langle A(x-y), x-y\rangle$$

Demostración, final

Hemos mostrado que

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Sustituimos $-y$ en lugar de y:

$$\langle A(x-y), x-y\rangle =$$

Demostración, final

Hemos mostrado que

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Sustituimos $-y$ en lugar de y:

$$\langle A(x-y), x-y\rangle = \langle Ax, x\rangle - 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Demostración, final

Hemos mostrado que

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Sustituimos $-y$ en lugar de y:

$$\langle A(x-y), x-y\rangle = \langle Ax, x\rangle - 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Restamos la segunda igualdad de la primera:

$$\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle$$

Demostración, final

Hemos mostrado que

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Sustituimos $-y$ en lugar de y:

$$\langle A(x-y), x-y\rangle = \langle Ax, x\rangle - 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Restamos la segunda igualdad de la primera:

$$\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle =$$

Demostración, final

Hemos mostrado que

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Sustituimos $-y$ en lugar de y:

$$\langle A(x-y), x-y\rangle = \langle Ax, x\rangle - 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Restamos la segunda igualdad de la primera:

$$\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle = 4\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle).$$

La norma de la forma cuadática

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, le asociamos la forma sesquilineal $q(x) := g(x,x)$.

Definimos $\|q\|$ como

$$\|q\| := \sup_{\substack{x\in H\\ x\neq 0_H}} \frac{|q(x)|}{\|x\|^2}.$$

La norma de la forma cuadática

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, le asociamos la forma sesquilineal $q(x) := g(x, x)$.

Definimos $\|q\|$ como

$$\|q\| := \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{|q(x)|}{\|x\|^2}.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$\|q\| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| le 1}} |q(x)|.$$

La norma de la forma cuadática

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, le asociamos la forma sesquilineal $q(x) := g(x,x)$.

Definimos $\|q\|$ como

$$\|q\| := \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{|q(x)|}{\|x\|^2}.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$\|q\| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| le 1}} |q(x)|.$$

Ejercicio. Demostrar que $\|q\| \leq \|g\|$.

La norma de la forma cuadática

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, le asociamos la forma sesquilineal $q(x) := g(x, x)$.

Definimos $\|q\|$ como

$$\|q\| := \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{|q(x)|}{\|x\|^2}.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$\|q\| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| le 1}} |q(x)|.$$

Ejercicio. Demostrar que $\|q\| \leq \|g\|$.

Si $A \in \mathcal{B}(H)$ y $g = f_A$,

$$\|q_A\| = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{|\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}.$$

La norma del operador autoadjunto coincide con la norma de su forma cuadrática

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$\|A\| = \sup_{x \in H \setminus \{0_H\}} \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^2}.$$

La norma del operador autoadjunto coincide con la norma de su forma cuadrática

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$\|A\| = \sup_{x \in H \setminus \{0_H\}} \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|x\|^2}.$$

En otras palabras, estamos afirmando que $\|A\| = \|q_A\|$.

Demostración de la parte trivial, $\|q_A\| \le \|A\|$

Esta parte es válida para cualquier operador lineal acotado, no necesariamente autoadjunto.

Demostración de la parte trivial, $\|q_A\| \le \|A\|$

Esta parte es válida para cualquier operador lineal acotado, no necesariamente autoadjunto.

Para cada x en H,

$$|\langle Ax, x\rangle|$$

Demostración de la parte trivial, $\|q_A\| \leq \|A\|$

Esta parte es válida para cualquier operador lineal acotado, no necesariamente autoadjunto.

Para cada x en H,

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq$$

Demostración de la parte trivial, $\|q_A\| \le \|A\|$

Esta parte es válida para cualquier operador lineal acotado, no necesariamente autoadjunto.

Para cada x en H,

$$|\langle Ax, x\rangle| \le \|Ax\|\,\|x\|$$

Demostración de la parte trivial, $\|q_A\| \le \|A\|$

Esta parte es válida para cualquier operador lineal acotado, no necesariamente autoadjunto.

Para cada x en H,

$$|\langle Ax, x\rangle| \le \|Ax\| \, \|x\| \le$$

Demostración de la parte trivial, $\|q_A\| \leq \|A\|$

Esta parte es válida para cualquier operador lineal acotado, no necesariamente autoadjunto.

Para cada x en H,

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\|\,\|x\| \leq \|A\|\,\|x\|^2.$$

Demostración de la parte trivial, $\|q_A\| \le \|A\|$

Esta parte es válida para cualquier operador lineal acotado, no necesariamente autoadjunto.

Para cada x en H,

$$|\langle Ax, x\rangle| \le \|Ax\|\,\|x\| \le \|A\|\,\|x\|^2.$$

Si $x \ne 0_H$, entonces

$$\frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^2} \le \|A\|.$$

Demostración de la parte trivial, $\|q_A\| \le \|A\|$

Esta parte es válida para cualquier operador lineal acotado, no necesariamente autoadjunto.

Para cada x en H,

$$|\langle Ax, x\rangle| \le \|Ax\|\,\|x\| \le \|A\|\,\|x\|^2.$$

Si $x \ne 0_H$, entonces

$$\frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^2} \le \|A\|.$$

De aquí

$$M := \|q_A\| = \sup_{\substack{x\in H\\ \|x\|\le 1}} |\langle Ax, x\rangle| \le \|A\|.$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \geq \|A\|$

Por la definición de M, para cada u en H

$$|\langle Au, u\rangle| \leq M \|u\|^2.$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \geq \|A\|$

Por la definición de M, para cada u en H

$$|\langle Au, u\rangle| \leq M \|u\|^2.$$

Expresamos la parte real de la forma sesquilineal por medio de la forma cuadrática:

$$4\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle)$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \geq \|A\|$

Por la definición de M, para cada u en H

$$|\langle Au, u\rangle| \leq M \|u\|^2.$$

Expresamos la parte real de la forma sesquilineal por medio de la forma cuadrática:

$$4\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) =$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \geq \|A\|$

Por la definición de M, para cada u en H

$$|\langle Au, u\rangle| \leq M \|u\|^2.$$

Expresamos la parte real de la forma sesquilineal por medio de la forma cuadrática:

$$4\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle) = \langle A(x+y), x+y)\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle.$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \geq \|A\|$

Por la definición de M, para cada u en H

$$|\langle Au, u\rangle| \leq M \|u\|^2.$$

Expresamos la parte real de la forma sesquilineal por medio de la forma cuadrática:

$$4\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) = \langle A(x+y), x+y)\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle.$$

Acotamos esta expresión, aplicando la desigualdad de arriba y la ley de paralelogramo:

$$4|\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle)|$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \geq \|A\|$

Por la definición de M, para cada u en H

$$|\langle Au, u\rangle| \leq M \|u\|^2.$$

Expresamos la parte real de la forma sesquilineal por medio de la forma cuadrática:

$$4 \operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle) = \langle A(x+y), x+y)\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle.$$

Acotamos esta expresión, aplicando la desigualdad de arriba y la ley de paralelogramo:

$$4|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \leq$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \geq \|A\|$

Por la definición de M, para cada u en H

$$|\langle Au, u\rangle| \leq M\,\|u\|^2.$$

Expresamos la parte real de la forma sesquilineal por medio de la forma cuadrática:

$$4\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) = \langle A(x+y), x+y)\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle.$$

Acotamos esta expresión, aplicando la desigualdad de arriba y la ley de paralelogramo:

$$4|\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \leq M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2)$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \geq \|A\|$

Por la definición de M, para cada u en H

$$|\langle Au, u\rangle| \leq M \|u\|^2.$$

Expresamos la parte real de la forma sesquilineal por medio de la forma cuadrática:

$$4\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) = \langle A(x+y), x+y)\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle.$$

Acotamos esta expresión, aplicando la desigualdad de arriba y la ley de paralelogramo:

$$4|\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \leq M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2) =$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \geq \|A\|$

Por la definición de M, para cada u en H

$$|\langle Au, u\rangle| \leq M\,\|u\|^2.$$

Expresamos la parte real de la forma sesquilineal por medio de la forma cuadrática:

$$4\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) = \langle A(x+y), x+y)\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle.$$

Acotamos esta expresión, aplicando la desigualdad de arriba y la ley de paralelogramo:

$$4|\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \leq M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2) = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \leq \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \leq M.$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \le \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \leq \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \leq M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$.

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \le \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces

$$\boxed{|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.}$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$. Entonces $\langle Ax, y\rangle = \tau\,|\langle Ax, y\rangle|$.

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \le \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$. Entonces $\langle Ax, y\rangle = \tau\,|\langle Ax, y\rangle|$.

Aplicamos la desigualdad anterior con τy en vez de y.

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \le \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$. Entonces $\langle Ax, y\rangle = \tau\,|\langle Ax, y\rangle|$.

Aplicamos la desigualdad anterior con τy en vez de y.

$$M$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \leq \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \leq M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$. Entonces $\langle Ax, y\rangle = \tau\,|\langle Ax, y\rangle|$.

Aplicamos la desigualdad anterior con τy en vez de y.

$$M \geq$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \le \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$. Entonces $\langle Ax, y\rangle = \tau\,|\langle Ax, y\rangle|$.

Aplicamos la desigualdad anterior con τy en vez de y.

$$M \ge |\operatorname{Re}(\langle Ax, \tau y\rangle)|$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \le \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$. Entonces $\langle Ax, y\rangle = \tau\,|\langle Ax, y\rangle|$.

Aplicamos la desigualdad anterior con τy en vez de y.

$$M \ge |\operatorname{Re}(\langle Ax, \tau y\rangle)| =$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \le \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$. Entonces $\langle Ax, y\rangle = \tau\,|\langle Ax, y\rangle|$.

Aplicamos la desigualdad anterior con τy en vez de y.

$$M \ge |\operatorname{Re}(\langle Ax, \tau y\rangle)| = |\operatorname{Re}(\overline{\tau}\langle Ax, y\rangle)|$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \le \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$. Entonces $\langle Ax, y\rangle = \tau\,|\langle Ax, y\rangle|$.

Aplicamos la desigualdad anterior con τy en vez de y.

$$M \ge |\operatorname{Re}(\langle Ax, \tau y\rangle)| = |\operatorname{Re}(\overline{\tau}\langle Ax, y\rangle)| =$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \le \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$. Entonces $\langle Ax, y\rangle = \tau\,|\langle Ax, y\rangle|$.

Aplicamos la desigualdad anterior con τy en vez de y.

$$M \ge |\operatorname{Re}(\langle Ax, \tau y\rangle)| = |\operatorname{Re}(\overline{\tau}\langle Ax, y\rangle)| = |\operatorname{Re}(|\langle Ax, y\rangle|)|$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \le \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$. Entonces $\langle Ax, y\rangle = \tau\,|\langle Ax, y\rangle|$.

Aplicamos la desigualdad anterior con τy en vez de y.

$$M \ge |\operatorname{Re}(\langle Ax, \tau y\rangle)| = |\operatorname{Re}(\overline{\tau}\langle Ax, y\rangle)| = |\operatorname{Re}(|\langle Ax, y\rangle|)| =$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \le \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$. Entonces $\langle Ax, y\rangle = \tau\,|\langle Ax, y\rangle|$.

Aplicamos la desigualdad anterior con τy en vez de y.

$$M \ge |\operatorname{Re}(\langle Ax, \tau y\rangle)| = |\operatorname{Re}(\overline{\tau}\langle Ax, y\rangle)| = |\operatorname{Re}(|\langle Ax, y\rangle|)| = |\langle Ax, y\rangle|.$$

Demostración de la parte interesante, $\|q_A\| \le \|A\|$

Supongamos que $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.$$

Para cada z en $\mathbb{C}$, existe τ en $\mathbb{C}$ con $|\tau| = 1$ tal que $z = \tau\,|z|$.

Encontramos τ para $z = \langle Ax, y\rangle$. Entonces $\langle Ax, y\rangle = \tau\,|\langle Ax, y\rangle|$.

Aplicamos la desigualdad anterior con τy en vez de y.

$$M \ge |\operatorname{Re}(\langle Ax, \tau y\rangle)| = |\operatorname{Re}(\overline{\tau}\langle Ax, y\rangle)| = |\operatorname{Re}(|\langle Ax, y\rangle|)| = |\langle Ax, y\rangle|.$$

Por lo tanto, $M \ge \|f_A\| = \|A\|$.

Observación sobre los máximos, mínimos y valores absolutos

Ejercicio.

Sean $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$, $M_1 \leq M_2$,

$$C := \max\{|M_1|, |M_2|\}.$$

Mostrar que

$$[M_1, M_2] \subseteq [-C, C].$$

Sobre el ínfimo y el supremo del cociente de Rayleigh

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$\|A\| = \max\{|M_1(A)|, |M_2(A)|\},$$

donde

$$M_1(A) := \inf_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}, \qquad M_2(A) := \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Sobre el ínfimo y el supremo del cociente de Rayleigh

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$\|A\| = \max\{|M_1(A)|, |M_2(A)|\},$$

donde

$$M_1(A) := \inf_{\substack{x\in H\\ x\neq 0_H}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}, \qquad M_2(A) := \sup_{\substack{x\in H\\ x\neq 0_H}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

Observación. Como A es autoadjunto, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cada x.

Sobre el ínfimo y el supremo del cociente de Rayleigh

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$\|A\| = \max\{|M_1(A)|, |M_2(A)|\},$$

donde

$$M_1(A) := \inf_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}, \qquad M_2(A) := \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

Observación. Como A es autoadjunto, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cada x.

Por lo tanto, las definiciones de $M_1(A)$, $M_2(A)$ tienen sentido.

Sobre el ínfimo y el supremo del cociente de Rayleigh

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}_a(H)$. Entonces

$$\|A\| = \max\{|M_1(A)|, |M_2(A)|\},$$

donde

$$M_1(A) := \inf_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}, \qquad M_2(A) := \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

Observación. Como A es autoadjunto, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cada x.

Por lo tanto, las definiciones de $M_1(A)$, $M_2(A)$ tienen sentido.

En la siguiente demostración, pongamos $M_3(A) := \max\{|M_1(A)|, |M_2(A)|\}$.

Demostración

Para cada x en $H \setminus \{0_H\}$,

$$-\|A\| \leq \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \leq \|A\|.$$

Demostración

Para cada x en $H \setminus \{0_H\}$,

$$-\|A\| \leq \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \leq \|A\|.$$

Por lo tanto,

$$-\|A\| \leq M_1(A) \leq M_2(A) \leq \|A\|.$$

Demostración

Para cada x en $H \setminus \{0_H\}$,

$$-\|A\| \leq \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \leq \|A\|.$$

Por lo tanto,

$$-\|A\| \leq M_1(A) \leq M_2(A) \leq \|A\|.$$

Esto implica que $\quad |M_1(A)| \leq \|A\|, \quad |M_2(A)| \leq \|A\|, \quad M_3(A) \leq \|A\|.$

Demostración

Para cada x en $H \setminus \{0_H\}$,

$$-\|A\| \leq \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \leq \|A\|.$$

Por lo tanto,

$$-\|A\| \leq M_1(A) \leq M_2(A) \leq \|A\|.$$

Esto implica que $\quad |M_1(A)| \leq \|A\|, \quad |M_2(A)| \leq \|A\|, \quad M_3(A) \leq \|A\|.$

Por otro lado, para cada x en $H \setminus \{0_H\}$ tenemos

$$-M_3(A) \leq M_1(A) \leq \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \leq M_2(A) \leq M_3(A),$$

Demostración

Para cada x en $H \setminus \{0_H\}$,

$$-\|A\| \leq \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \leq \|A\|.$$

Por lo tanto,

$$-\|A\| \leq M_1(A) \leq M_2(A) \leq \|A\|.$$

Esto implica que $\quad |M_1(A)| \leq \|A\|, \quad |M_2(A)| \leq \|A\|, \quad M_3(A) \leq \|A\|.$

Por otro lado, para cada x en $H \setminus \{0_H\}$ tenemos

$$-M_3(A) \leq M_1(A) \leq \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \leq M_2(A) \leq M_3(A),$$

así que $\frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^2} \leq M_3(A)$.

Demostración

Para cada x en $H \setminus \{0_H\}$,

$$-\|A\| \le \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \le \|A\|.$$

Por lo tanto,

$$-\|A\| \le M_1(A) \le M_2(A) \le \|A\|.$$

Esto implica que $\quad |M_1(A)| \le \|A\|, \quad |M_2(A)| \le \|A\|, \quad M_3(A) \le \|A\|.$

Por otro lado, para cada x en $H \setminus \{0_H\}$ tenemos

$$-M_3(A) \le M_1(A) \le \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \le M_2(A) \le M_3(A),$$

así que $\frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^2} \le M_3(A)$.

Pasando al supremo, obtenemos $\|A\| \le C$.

Ejercicio: análisis de un operador no autoadjunto

En el espacio $H := \mathbb{C}^2$ consideremos el operador $x \mapsto Ax$ asociado a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio: análisis de un operador no autoadjunto

En el espacio $H := \mathbb{C}^2$ consideremos el operador $x \mapsto Ax$ asociado a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que $\|A\| = 1$, pero $\|q_A\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio: análisis de un operador no autoadjunto

En el espacio $H := \mathbb{C}^2$ consideremos el operador $x \mapsto Ax$ asociado a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que $\|A\| = 1$, pero $\|q_A\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sugerencia: puede ser útil la desigualdad elemental

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$