Espacios métricos conexos por arcos

Objetivos. Estudiar las propiedades más simples de espacios métricos conexos por arcos (arco-conexos, conexos por caminos).

Prerrequisitos. Espacio métrico conexo, intervalo, función continua.

1 Definición (camino en un espacio métrico)**.** Sea X un espacio métrico. Un *camino* en X es una función continua $[0,1] \to X$.

2 Definición (camino que une dos puntos dados)**.** Sean X un espacio métrico, $a, b \in X$, $\gamma \in C([0,1], X)$. Se dice que γ *une* (*conecta*) a con b, si $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$.

3 Proposición. *Sean X un espacio métrico, $a, b \in X$, γ_1 un camino que conecta a y b. Definimos $\gamma_2 \colon [0,1] \to X$,*

$$\gamma_2(t) \coloneqq \gamma_1(1-t) \qquad (t \in [0,1]).$$

Entonces γ_2 es un camino que conecta b con a.

Demostración. La función γ_2 se puede escribir como $\gamma_1 \circ f$, donde $f \colon [0,1] \to [0,1]$, $f(t) = 1 - t$. Luego $\gamma_2 \in C([0,1], X)$. Además, $\gamma_2(0) = \gamma_1(1) = b$ y $\gamma_2(1) = \gamma_1(0) = a$. □

4 Proposición. *Sean X un espacio métrico, $a, b, c \in X$, γ_1 un camino que conecta a con b, γ_2 un camino que conecta b con c. Definimos $\gamma_3 \colon [0,1] \to X$,*

$$\gamma_3(t) \coloneqq \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \gamma_2(2t-1), & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Entonces γ_3 es un camino que conecta a con c.

Demostración. Es fácil ver que la función γ_3 es continua en cada punto del intervalo $[0, 1/2)$ y en cada punto del intervalo $(1/2, 1]$. En el punto $t_0 = 1/2$ tenemos la siguiente situación:

$$\lim_{t \to t_0^-} \gamma_3(t) = b = \gamma_3(t_0) = \lim_{t \to t_0^+} \gamma_3(t),$$

luego γ_3 es continua también en el punto $1/2$. Además, $\gamma_3(0) = a$ y $\gamma_3(1) = c$. □

5 Ejercicio. Sean X un espacio métrico, $a \in X$. Construir un camino que une a y a.

6 Ejercicio. Sea X un espacio métrico. Definimos en X una relación binaria: ponemos $a \sim b$ si existe un camino que une a y b. Demostrar que esta relación binaria es una relación de equivalencia.

7 Definición (espacio métrico conexo por arcos)**.** Sea X un espacio métrico. Se dice que X es *conexo por arcos* (o *conexo por caminos*, o es *arco-conexo*), si para cualesquiera a y b en X, existe un camino en X que conecta a con b.

8 Proposición (cada espacio conexo por arcos es conexo)**.** *Sea X un espacio métrico conexo por arcos. Entonces X es conexo.*

Primera demostración. Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es disconexo. Supongamos que P y Q son conjuntos abiertos en X que forman una partición de X. Elegimos $a \in P$, $b \in Q$. Usando la suposición que X es conexo por caminos encontramos un camino $\gamma \in C([0,1], X)$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$.

Como $[0,1]$ es conexo y γ es continua, el conjunto $Y := \gamma([0,1])$ es conexo en X. Por otro lado, los conjuntos $P \cap Y$ y $Q \cap Y$ son conexos en Y y forman una partición de Y. Luego Y es disconexo. Llegamos a una contradicción. $\square$

Segunda demostración. Sean P, Q, a, b, γ como en la primera demostración. Pongamos $V := \gamma^{-1}[P]$, $W := \gamma^{-1}[Q]$. Entonces es fácil ver que V y W son abiertos en X y forman una partición de X. Esto contradice a la suposición que X es conexo. $\square$