Núcleos aproximativos sobre los números reales

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

16 de diciembre de 2021

Objetivos

- Definir el concepto de núcleos aproximativos en $\mathbb{R}$.
- Conocer un par de ejemplos.
- Demostrar el teorema de aproximación para f en $C_{bu}(\mathbb{R})$.
- Demostrar el teorema de aproximación para f en $L^1(\mathbb{R})$.
- Demostrar la propiedad inyectiva de la transformada de Fourier.

Prerrequisitos

- Propiedades de la integral de Lebesgue.
- El espacio $L^1(\mathbb{R})$.
- Funciones uniformemente continuas, el indicador de continuidad.
- La integral de Lebesgue y traslaciones.
- Teoremas de Tonelli y Fubini.
- Convolución y sus propiedades básicas.

Plan

Núcleo aproximativo: definición

Una familia $(K_t)_{t>0}$ con valores en $L^1(\mathbb{R})$ se llama núcleo aproximativo, si

1. $\sup_{t>0} \|K_t\|_1 < +\infty$;
2. para cada $t > 0$,
$$\int_\mathbb{R} K_t(x)\,\mathrm{d}x = 1;$$
3. para cada $\delta > 0$,
$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

Familia de Dirac: definición

Una familia $(K_t)_{t>0}$ con valores en $L^1(\mathbb{R})$ se llama familia de Dirac, si

1. para cada $t>0$ y c.t.p. x en $\mathbb{R}$,
$$K_t(x) \geq 0;$$
2. para cada $t>0$,
$$\int_{\mathbb{R}} K_t(x)\,\mathrm{d}x = 1;$$
3. para cada $\delta>0$,
$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_t(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Proposición

Sea $(K_t)_{t>0}$ una familia con valores en $L^1(\mathbb{R})$.

Entonces $(K_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac si, y solo si,

1. $(K_t)_{t>0}$ es un núcleo aproximativo,
2. $K_t(x) \geq 0$ para cada $t > 0$ y c.t.p. x en $\mathbb{R}$.

Terminología

En vez de la frase “núcleo aproximativo”, algunos autores prefieren usar otros términos:

- núcleo bueno,
- identidad aproximada,
- aproximación de la identidad.

Se puede trabajar con un conjunto dirigido de índices, en vez de $(0, +\infty)$

De manera más general, podemos suponer que

- J es un conjunto dirigido,
- $(K_t)_{t\in J}$ es una familia (red) en $L^1(\mathbb{R})$,
- $\sup_{t\in J} \|K_t\|_1 < +\infty$,
- $\forall t \in J \quad \int_{\mathbb{R}} K_t \,\mathrm{d}\mu = 1$,
- Para cada $\delta > 0$,

$$\lim_{t\in J} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Una propiedad de funciones Lebesgue integrables

$\mathcal{F} :=$ la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$,

$\mu :=$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Proposición (repaso)

Sea $g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{L \to +\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-L,L)} |g(y)| \, \mathrm{d}y = 0.$$

Repaso: la integral de Lebesgue y dilataciones

Proposición (repaso)

Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $\alpha > 0$. Entonces

$$\int_\mathbb{R} f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \alpha \int_\mathbb{R} f(\alpha x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Repaso: la integral de Lebesgue y dilataciones

Proposición (repaso)

Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $\alpha > 0$. Entonces

$$\int_\mathbb{R} f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \alpha \int_\mathbb{R} f(\alpha x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Proposición (repaso)

Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, sea $Y \in \mathcal{F}$ y sea $\alpha > 0$. Entonces

$$\int_Y f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \alpha \int_{\frac{1}{\alpha}Y} f(\alpha x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Una receta para construir familias de Dirac

Proposición

Sea $g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $g(x) \geq 0$ y $\|g\|_1 = 1$. Para cada $t > 0$ pongamos

$$K_t(x) = \frac{1}{t} g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Entonces la familia $(K_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración

$$\|K_t\|_1 =$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\, \mathrm{d}x$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \overset{x=ty}{=\!=\!=}$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=ty} \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \overset{x=ty}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y =$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=ty} \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_\mathbb{R} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=ty} \int_\mathbb{R} g(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_t(x)\,\mathrm{d}x$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=ty} \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_t(x)\,\mathrm{d}x =$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=ty} \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \overset{x=ty}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \overset{x=ty}{=\!=\!=}$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \overset{x=ty}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \overset{x=ty}{=\!=\!=} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta/t,\delta/t)} g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Calculemos el límite de esta integral:

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta/t,\delta/t)} g(y)\,\mathrm{d}y$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=ty} \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=ty} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta/t,\delta/t)} g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Calculemos el límite de esta integral:

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta/t,\delta/t)} g(y)\,\mathrm{d}y \xlongequal{L=\delta/t}$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=ty} \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=ty} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta/t,\delta/t)} g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Calculemos el límite de esta integral:

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta/t,\delta/t)} g(y)\,\mathrm{d}y \xlongequal{L=\delta/t} \lim_{L\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-L,L)} g(y)\,\mathrm{d}y$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \overset{x=ty}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \overset{x=ty}{=\!=\!=} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta/t,\delta/t)} g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Calculemos el límite de esta integral:

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta/t,\delta/t)} g(y)\,\mathrm{d}y \overset{L=\delta/t}{=\!=\!=} \lim_{L\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-L,L)} g(y)\,\mathrm{d}y \overset{g\in L^1(\mathbb{R})}{=\!=\!=\!=}$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \overset{x=ty}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x \overset{x=ty}{=\!=\!=} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta/t,\delta/t)} g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Calculemos el límite de esta integral:

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta/t,\delta/t)} g(y)\,\mathrm{d}y \overset{L=\delta/t}{=\!=\!=} \lim_{L\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-L,L)} g(y)\,\mathrm{d}y \overset{g\in L^1(\mathbb{R})}{=\!=\!=} 0.$$

Ejemplo con la función gaussiana

Proposición

Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \mathrm{e}^{-\pi x^2}.$$

Para cada $u > 0$ definimos $K_u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$K_u(x) := \frac{1}{u} g\left(\frac{x}{u}\right).$$

Entonces $(K_u)_{u>0}$ es una familia de Dirac.

Ejemplo con la función gaussiana

Proposición

Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \mathrm{e}^{-\pi x^2}.$$

Para cada $u > 0$ definimos $K_u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$K_u(x) := \frac{1}{u} g\left(\frac{x}{u}\right).$$

Entonces $(K_u)_{u>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración.

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Ya vimos el ejemplo $K_u(x) = \frac{1}{u}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi x^2}{u^2}}$.

El núcleo de calor ($=$ el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Ya vimos el ejemplo $K_u(x) = \frac{1}{u}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi x^2}{u^2}}$.

Hacemos el cambio de variable

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Ya vimos el ejemplo $K_u(x) = \frac{1}{u}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi x^2}{u^2}}$.
Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{4\pi t}$:

$$K_{\sqrt{4\pi t}}(x) =$$

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Ya vimos el ejemplo $K_u(x) = \frac{1}{u}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi x^2}{u^2}}$.
Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{4\pi t}$:

$$K_{\sqrt{4\pi t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi x^2}{4\pi t}} =$$

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Ya vimos el ejemplo $K_u(x) = \frac{1}{u}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi x^2}{u^2}}$.
Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{4\pi t}$:

$$K_{\sqrt{4\pi t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi x^2}{4\pi t}} = H_t(x).$$

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Ya vimos el ejemplo $K_u(x) = \frac{1}{u}\, e^{-\frac{\pi x^2}{u^2}}$.
Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{4\pi t}$:

$$K_{\sqrt{4\pi t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{\pi x^2}{4\pi t}} = H_t(x).$$

Cuando $t \to 0$, obtenemos $u \to 0$.

El núcleo de Poisson en la recta real

Ejercicio. Sea

$$P_y(x) := \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} \qquad (y > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Demostrar que $(P_y)_{y>0}$ es una familia de Dirac.

El núcleo de Fejér en la recta real

Ejercicio. Sea

$$\Phi_t(x) := t \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{t}}{\pi x} \right)^2 .$$

Demostrar que $(\Phi_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Ejercicio. Encontrar un núcleo aproximativo que no sea una familia de Dirac.

Plan

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_\mathbb{R} \left(\int_\mathbb{R} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x)$$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) =$$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_\mathbb{R} \left(\int_\mathbb{R} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1 <$$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, |g(y)|\, \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Por lo tanto, $\mu(\mathbb{R} \setminus B) = 0$, donde

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty \right\}.$$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Por lo tanto, $\mu(\mathbb{R} \setminus B) = 0$, donde

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty \right\}.$$

Se define $f * g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\qquad (f * g)(x) :=$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Por lo tanto, $\mu(\mathbb{R} \setminus B) = 0$, donde

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty \right\}.$$

Se define $f * g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\qquad (f*g)(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\,\mathrm{d}\mu(y), & x \in B, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus B. \end{cases}$

Propiedades de la convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

- $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)$.
- Propiedad lineal respecto a cada uno de los argumentos.

Propiedades de la convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

- $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)$.
- Propiedad lineal respecto a cada uno de los argumentos.
- Propiedad asociativa.

Propiedades de la convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

- $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)$.
- Propiedad lineal respecto a cada uno de los argumentos.
- Propiedad asociativa.
- Propiedad conmutativa.

Propiedades de la convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

- $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)$.
- Propiedad lineal respecto a cada uno de los argumentos.
- Propiedad asociativa.
- Propiedad conmutativa.
- Si $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g$, $u \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} v$, entonces $f * u \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g * v$.

Propiedades de la convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

- $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)$.
- Propiedad lineal respecto a cada uno de los argumentos.
- Propiedad asociativa.
- Propiedad conmutativa.
- Si $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g$, $u \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} v$, entonces $f * u \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g * v$.

Debido a la última propiedad, podemos considerar $*$ como una operación en $L^1(\mathbb{R})$.

Convolución $f * g$ para $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

Sean $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Entonces para cada x en $\mathbb{R}$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty.$$

Convolución $f * g$ para $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

Sean $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Entonces para cada x en $\mathbb{R}$ se tiene

$$\int_\mathbb{R} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty.$$

Se define $f * g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$(f * g)(x) := \int_\mathbb{R} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Convolución $f * g$ para $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

Sean $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Entonces para cada x en $\mathbb{R}$ se tiene

$$\int_\mathbb{R} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty.$$

Se define $f * g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$(f * g)(x) := \int_\mathbb{R} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Entonces $f * g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ y

$$\mathcal{N}_\infty(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_\infty(g).$$

Plan

Desplazamientos de una función

Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y sea $h \in \mathbb{R}$.
Denotemos por $\tau_h f$ a la función

$$(\tau_h f)(x) := f(x - h).$$

Ejercicio. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $h \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\tau_h f \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\|\tau_h f\|_1 = \|f\|_1.$$

Continuidad del desplazamiento en $C_c(\mathbb{R})$

Proposición

Sea $f \in C_c(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_{\sup} = 0, \qquad \lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_1 = 0.$$

Demostración, inicio

Para cada h en $\mathbb{R}$ y cada x en $\mathbb{R}$,

$$|f(x-h) - f(x)| \leq$$

Demostración, inicio

Para cada h en $\mathbb{R}$ y cada x en $\mathbb{R}$,

$$|f(x-h)-f(x)| \le \omega_f(|h|).$$

Por lo tanto,

$$\|\tau_h f - f\|_{\sup} \le \omega_f(|h|),$$

Como f es uniformemente continua, esta expresión tiende a 0 cuando $h \to 0$.

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \qquad f(x) = 0.$$

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \qquad f(x) = 0.$$

Si $h \in \mathbb{R}$ y $|h| < L$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-2L, 2L) \qquad f(x-h) = 0.$$

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \qquad f(x) = 0.$$

Si $h \in \mathbb{R}$ y $|h| < L$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-2L, 2L) \qquad f(x-h) = 0.$$

Luego

$$\|\tau_h f - f\|_1 =$$

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \qquad f(x) = 0.$$

Si $h \in \mathbb{R}$ y $|h| < L$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-2L, 2L) \qquad f(x-h) = 0.$$

Luego

$$\|\tau_h f - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| \,\mathrm{d}x =$$

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \qquad f(x) = 0.$$

Si $h \in \mathbb{R}$ y $|h| < L$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-2L, 2L) \qquad f(x - h) = 0.$$

Luego

$$\|\tau_h f - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_{(-L,L)} |f(x-h) - f(x)| \, \mathrm{d}x \leq$$

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \qquad f(x) = 0.$$

Si $h \in \mathbb{R}$ y $|h| < L$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-2L, 2L) \qquad f(x-h) = 0.$$

Luego

$$\|\tau_h f - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{(-L,L)} |f(x-h) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq 2L\omega_f(|h|).$$

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \qquad f(x) = 0.$$

Si $h \in \mathbb{R}$ y $|h| < L$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-2L, 2L) \qquad f(x-h) = 0.$$

Luego

$$\|\tau_h f - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{(-L,L)} |f(x-h) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq 2L\omega_f(|h|).$$

Como f es uniformemente continua, la última expresión tiende a 0 cuando $h \to 0$.

Continuidad del desplazamiento en $L^1(\mathbb{R})$

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_1 = 0.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$,

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 <$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior,

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$ se cumple

$$\|g - \tau_h g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$ se cumple

$$\|g - \tau_h g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces para cada h en $(-\delta, de)$ obtenemos

$$\|\tau_h f - f\|_1 \leq$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$ se cumple

$$\|g - \tau_h g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces para cada h en $(-\delta, de)$ obtenemos

$$\|\tau_h f - f\|_1 \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_1 + \|\tau_h g - g\|_1 + \|g - f\|_1$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$ se cumple

$$\|g - \tau_h g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces para cada h en $(-\delta, de)$ obtenemos

$$\|\tau_h f - f\|_1 \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_1 + \|\tau_h g - g\|_1 + \|g - f\|_1 <$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$ se cumple

$$\|g - \tau_h g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces para cada h en $(-\delta, de)$ obtenemos

$$\|\tau_h f - f\|_1 \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_1 + \|\tau_h g - g\|_1 + \|g - f\|_1 < \varepsilon.$$

Convolución en términos de la función desplazada

Ejercicio. Mostrar que

$$(f * g)(x) = \int_\mathbb{R} (\tau_y f)(x) g(y) \, \mathrm{d}y,$$

cuando la convolución está bien definida.

Continuidad de la convolución $f * g$ con $f \in L^1$, $g \in L^\infty$

Ejercicio. Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Demostrar que $f * g \in C_{bu}(\mathbb{R})$.

Plan

Aproximación en $L^1(\mathbb{R})$

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo. Entonces

$$\lim_{t\to 0} \|f * K_t - f\|_1 = 0.$$

Demostración, inicio

Notamos que

$$|(f * K_t)(x) - f(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)|\,|(\tau_y f)(x) - f(x)|\,\mathrm{d}y.$$

Integramos sobre x e intercambiamos las integrales usando el teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned}\|f * K_t - f\|_1 &\le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K_t(y)|\,|(\tau_y f)(x) - f(x)|\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K_t(y)|\,|(\tau_y f)(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)|\,\|\tau_y f - f\|_1\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Demostración, continuación

$$\|f * K_t - f\|_1 \le \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)|\, \|\tau_y f - f\|_1 \,\mathrm{d}y.$$

Para cada $\delta > 0$ dividimos la última integral en dos partes:

$$\begin{aligned}
\|f * K_t - f\|_1 &\le \int_{(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\, \|\tau_y f - f\|_1 \,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\, |\tau_y f - f\|_1 \,\mathrm{d}y \\
&\le \sup_{t>0} \|K_t\|_1 \cdot \sup_{y\in(-\delta,\delta)} \|\tau_y f - f\|_1 + 2\|f\|_1 \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)| \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$.

Usando el hecho que $\|\tau_h f - f\|_1 \to 0$ cuando $y \to 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{y\in(-\delta,\delta)} \|\tau_y f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2\sup_{t>0} \|K_t\|_1}.$$

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$.

Usando el hecho que $\|\tau_h f - f\|_1 \to 0$ cuando $y \to 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{y\in(-\delta,\delta)} \|\tau_y f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2\sup_{t>0}\|K_t\|_1}.$$

Aplicando la definición del núcleo aproximativo,
encontramos $t_0 > 0$ tal que para cada t en $(0, t_0)$

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\,\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_1 + 1}.$$

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$.

Usando el hecho que $\|\tau_h f - f\|_1 \to 0$ cuando $y \to 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{y \in (-\delta,\delta)} \|\tau_y f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2 \sup_{t>0} \|K_t\|_1}.$$

Aplicando la definición del núcleo aproximativo,
encontramos $t_0 > 0$ tal que para cada t en $(0, t_0)$

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)| \,\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_1 + 1}.$$

Entonces para cada t en $(0, t_0)$ obtenemos $\|f * K_t - f\|_1 < \varepsilon$.

Plan

Convolución con el núcleo de calor, repaso

Proposición

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces para cada x en $\mathbb{R}$ se tiene

$$(f * H_t)(x) = \int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{-4\pi^2 t\xi^2}\, \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi.$$

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces $f = 0$ c.t.p.

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en $\mathbb{R}$ obtenemos

$$(f * H_t)(x) =$$

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en $\mathbb{R}$ obtenemos

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-4\pi^2 t\xi^2}\, \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi$$

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en $\mathbb{R}$ obtenemos

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-4\pi^2 t\xi^2}\, \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi =$$

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en $\mathbb{R}$ obtenemos

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-4\pi^2 t\xi^2}\, \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi = 0.$$

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en $\mathbb{R}$ obtenemos

$$(f * H_t)(x) = \int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{-4\pi^2 t\xi^2}\, \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi = 0.$$

Luego,

$$\|f\|_1 \leq \|f - f * H_t\|_1 + \|f * H_t\|_1 = \|f - f * H_t\|_1.$$

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en $\mathbb{R}$ obtenemos

$$(f * H_t)(x) = \int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{-4\pi^2 t\xi^2}\, \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi = 0.$$

Luego,

$$\|f\|_1 \le \|f - f * H_t\|_1 + \|f * H_t\|_1 = \|f - f * H_t\|_1.$$

Pasamos al límite cuando $t \to 0^+$ y obtenemos

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en $\mathbb{R}$ obtenemos

$$(f * H_t)(x) = \int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{-4\pi^2 t\xi^2}\,\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Luego,

$$\|f\|_1 \le \|f - f * H_t\|_1 + \|f * H_t\|_1 = \|f - f * H_t\|_1.$$

Pasamos al límite cuando $t \to 0^+$ y obtenemos $\|f\|_1 = 0$.

Plan

Repaso: el medidor de continuidad uniforme

(en la terminología antigua, el “módulo de continuidad uniforme”)

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Definimos $\omega_f\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty]$,

$$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \le \delta\}.$$

Repaso: el medidor de continuidad uniforme

(en la terminología antigua, el “módulo de continuidad uniforme”)

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Definimos $\omega_f\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty]$,

$$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \le \delta\}.$$

Ejercicio. Demostrar que ω_f es una función decreciente.

Repaso: el medidor de continuidad uniforme

(en la terminología antigua, el "módulo de continuidad uniforme")

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Definimos $\omega_f\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty]$,

$$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \le \delta\}.$$

Ejercicio. Demostrar que ω_f es una función decreciente.

Ejercicio. Demostrar que f es uniformemente continua $\iff \lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0.$

Aproximación uniforme con los núcleos aproximativos

$C_{bu}(\mathbb{R}) :=$ el espacio de las funciones acotadas y uniformemente continuas.

Teorema

Sea $f \in C_{bu}(\mathbb{R})$ y sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo. Entonces

$$\lim_{t \to 0^+} \|f * K_t - f\|_{\sup} = 0.$$

Demostración, inicio

Sea

$$M := \sup_{t>0} \|K_t\|_1.$$

Sabemos que $M < +\infty$. Además, sabemos que

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0.$$

Para cada $t > 0$ y cada $x \in \mathbb{R}$,

$$|(f * K_t)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\,\mathrm{d}y.$$

Demostración, continuación

Para cada $\delta > 0$, dividimos la integral en dos partes.

$$\begin{aligned}
|(f * K_t)(x) - f(x)| &\le \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\,\mathrm{d}y \\
&\le \int_{(-\delta,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\,|K_t(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |f(x-y) - f(y)|\,|K_t(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\le \omega_f(\delta) M + 2\|f\|_{\sup} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Hemos mostrado que

$$\|f * K_t - f\|_{\mathsf{sup}} \leq \omega_f(\delta)M + 2\|f\|_{\mathsf{sup}} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Hemos mostrado que

$$\|f * K_t - f\|_{\mathsf{sup}} \leq \omega_f(\delta)M + 2\|f\|_{\mathsf{sup}} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$,

Hemos mostrado que

$$\|f * K_t - f\|_{\sup} \leq \omega_f(\delta)M + 2\|f\|_{\sup} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que

$$\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Hemos mostrado que

$$\|f * K_t - f\|_{\sup} \le \omega_f(\delta) M + 2\|f\|_{\sup} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que

$$\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Luego elegimos $t_0 > 0$ tal que para cada t en $(0, t_0)$

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\,\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{\sup} + 1}.$$

Hemos mostrado que

$$\|f * K_t - f\|_{\sup} \le \omega_f(\delta)M + 2\|f\|_{\sup} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que

$$\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Luego elegimos $t_0 > 0$ tal que para cada t en $(0, t_0)$

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\,\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{\sup} + 1}.$$

Entonces para cada t en $(0, t_0)$ obtenemos $\|f * K_t - f\|_{\sup} < \varepsilon$.

Aproximación en un punto

Ejercicio.

Sea $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Supongamos que f es continua en x.

Sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo. Demostrar que

$$\lim_{t\to 0^+} (K_t * f)(x) = f(x).$$