# Aproximación de funciones medibles por funciones continuas

**Objetivos.** Mostrar que las funciones continuas de soporte compacto forman un subconjunto denso en $L^p$, y que cada función medible en un conjunto de medida finita coincide con una función continua, fuera de un conjunto de medida pequeña (teorema de Luzin).

**Requisitos.** Espacios localmente compactos, medidas regulares.

## Algunos conceptos de topología

**1. Espacios topológicos localmente compactos.** Sea $X$ un espacio topológico. Se dice que $X$ es localmente compacto si para cada punto $x$ en $X$ existe un conjunto abierto $A$ que contiene a $x$ y cuya cerradura es un subconjunto compacto de $X$.

**2. El soporte de una función.** Sea $X$ un espacio topológico y sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función. Entonces la cerradura del conjunto $\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}$ se llama el *soporte* de $f$ y se denota por $\operatorname{supp}(f)$.

**3. Funciones continuas de soporte compacto.** Sean $X, Y$ espacios topológicos. Denotamos por $C_c(X, Y)$ al conjunto de las funciones continuas $f\colon X \to Y$ para las cuales $\operatorname{supp}(f)$ es compacto. En vez de $C_c(X, \mathbb{C})$ escribimos simplemente $C_c(X)$.

**4. Espacios normales y T4.** Un espacio topológico $X$ se llama *normal* si para cualesquiera dos conjuntos cerrados y disjuntos $A$ y $B$ existen conjuntos abiertos y disjuntos $U$ y $V$ tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Un espacio topológico satisface la condición T4 si es normal y de Hausdorff. Se sabe que cualquier espacio de Hausdorff compacto es T4.

**5. Lema de Urysohn.** Sea $X$ un espacio normal y sean $A$ y $B$ dos subconjuntos cerrados y disjuntos. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para cada $x$ en $A$ y $f(x) = 1$ para cada $x$ en $B$.

**6. Lema de Urysohn para espacios de Hausdorff localmente compactos.** Sean $X$ un espacio de Hausdorff localmente compacto, $K$ un conjunto compacto en $X$ y $U$ un abierto en $X$ tal que $K \subset U$. Entonces existe una función $f \in C_c(X, [0, 1])$ tal que $1_K \leq f$ y $\operatorname{supp}(f) \subset U$.

**7. Teorema de extensión de Tietze.** Sean $X$ un espacio normal, $A$ un subconjunto cerrado de $X$ y $g \in C(A, \mathbb{R})$. Entonces existe una función $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $f|_A = g$.

## Medidas regulares

**8. Medida regular.** Suponemos que $(X, \tau)$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto, $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra que contiene a la $\sigma$-álgebra de Borel en $X$, y $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ es una medida que cumple con las siguientes propiedades:

- Para cada subconjunto compacto $K$ de $X$, $\mu(K) < +\infty$.
- Para cada $Y$ en $\mathcal{F}$,
$$\mu(Y) = \inf\{\mu(U)\colon\ U \in \tau,\ Y \subset U\}.$$
- Para cada $Y$ en $\mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) < +\infty$,
$$\mu(Y) = \sup\{\mu(K)\colon\ K \subset Y,\ K \text{ es compacto}\}.$$

**9. Teorema (densidad de las funciones continuas de soporte compacto en $\boldsymbol{L^p}$ para $\boldsymbol{p < +\infty}$).** Sea $X$ un espacio espacio de Hausdorff localmente compacto con una medida regular $\mu$, y sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces $C_c(X)$ es denso en $L^p(X, \mu)$.

*Demostración.* 1. Primero verifiquemos que $C_c(X)$ es un subconjunto de $L^p(X, \mu)$. En efecto, si $f \in C_c(X)$, entonces $f$ es acotada y
$$\|f\|_p^p \le \mu(\operatorname{supp}(f))\|f\|_\infty^p.$$

2. Probemos que $C_c(X)$ es denso en $L^p(X, \mu)$. Ya sabemos que el conjunto $\mathcal{S}$ de las funciones simples que se anulan fuera de conjuntos de medida cero, es denso en $L^p(X, \mu)$. Además cada función de clase $\mathcal{S}$ es una combinación lineal de funciones características de conjuntos de medida finita.

Sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta = (\varepsilon/2)^p/2$. Usando la hipótesis que la medida $\mu$ es regular, encontramos un conjunto compacto $K$ y un conjunto abierto $V$ tales que $K \subset Y \subset V$, $\mu(K) > \mu(Y) - \delta$ y $\mu(V) < \mu(Y) + \delta$. Aplicando el corolario del teorema de Urysohn encontramos una función $f \in C_c(X, [0, 1])$ tal que $1_K \le f$ y $\operatorname{supp}(f) \subset V$. Entonces
$$\begin{aligned}\|f - 1_Y\|_p &\le \|f - 1_K\|_p + \|1_K - 1_Y\|_p \\ &\le \mu(V \setminus K)^{1/p} + \mu(Y \setminus K)^{1/p} \le 2(2\delta)^{1/p} = \varepsilon.\end{aligned}$$
□

**10. Teorema de Luzin.** Sea $X$ un espacio espacio de Hausdorff localmente compacto con una medida regular $\mu$. Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) < +\infty$ y $f(x) = 0$ para cada $x$ en $X \setminus Y$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen $g \in C_c(X)$ y $E \in \mathcal{F}$ tales que $\mu(E) < \varepsilon$, $f(x) = g(x)$ para cada $x$ en $X \setminus E$ y $\|g\|_\infty \le \|f\|_\infty$.

*Demostración.* 1. Consideremos el caso principal cuando $f$ es acotada. En este caso $f \in L^1$. Luego existe una sucesión $g_n$ en $C_c(X)$ tal que $\|g_n - f\|_1 \to 0$. Pasando a una subsucesión, si es necesario, podemos suponer que $g_n$ converge a $f$ casi en todas partes. Por el teorema de Egórov, existe $Z$ con $\mu(Z) < \varepsilon/2$ tal que la convergencia es uniforme en $X \setminus Z$. Por regularidad, encontramos un conjunto compacto $K$ tal que $K \subset Y \setminus Z$ y $\mu((Y \setminus Z) \setminus K) < \varepsilon/2$. Luego $\mu(Y \setminus K) < \varepsilon$. La convergencia es uniforme en $K$, luego $f|_K$ es continua en $K$. Sea $V$ un abierto tal que $K \subset V$ y que la cerradura de $V$ es compacta. Por el teorema de extensión de Tietze, encontramos una función continua $h$ que coincide con $f|_K$ en $K$ y es cero en $X \setminus V$. Entonces $h \in C_c(X)$. Sea $b = \|f\|_\infty$. Pongamos $\varphi(t) = t$ para $|t| \le b$ y $\varphi(t) = bt/|t|$ para $|t| > b$. Entonces $\varphi$ es continua y $|\varphi(t)| \le b$ para cada $t$. Pongamos $g \coloneqq \varphi \circ h$.

2. En general, si no sabemos si $f$ es acotada, consideramos los conjuntos

$$G_n = \{x \in X\colon\ |f(x)| \ge n\}.$$

Entonces $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos de medida finita, y su intersección es $\varnothing$. Por eso $\mu(G_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $n$ tal que $\mu(G_n) < \varepsilon/2$. La función $f$ es acotada en $X \setminus G_n$. Aplicamos el resultado del inciso 1 a la función $f 1_{X\setminus G_n}$. $\square$