Aproximación de funciones integrales en $\mathbb{R}$ por funciones escalonadas

Definición 1 (el conjunto de las funciones simples medibles integrables)**.** Denotemos por $\mathcal{S}_0$ al conjunto de todas las funciones de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{1}_{A_k},$$

donde $m \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, A_k es Lebesgue-medible en $\mathbb{R}$ y $\mu(A_k) < +\infty$ para cada k en $\{1, \ldots, m\}$.

Ejercicio 2. Muestre que $\mathcal{S}_0$ es el conjunto de todas las funciones simples medibles integrables en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. En lo que sigue, identificamos las funciones de clase $\mathcal{S}_0$ con sus clases de equivalencia. Muestre que $\mathcal{S}_0$ es un subespacio vectorial de $L^1(\mathbb{R})$.

Proposición 4 (sobre la densidad de las funciones simples en $L^1(\mathbb{R})$, repaso)**.** *Entonces, $\mathcal{S}_0$ es un subconjunto denso de $L^1(\mathbb{R})$.*

Idea de demostración. Este hecho es cierto para cualquier espacio de medida; lo aplicamos para $\mathbb{R}$ con la σ-álgebra de Lebesgue $\mathcal{F}$ y con la medida de Lebesgue μ.

1. Si $B \in \mathcal{F}$ y $\mu(B) < +\infty$, entonces $\mathbb{1}_B \in L^1(\mathbb{R})$. Además, $L^1(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial. Por lo tanto, $\mathcal{S}_0 \subseteq L^1(\mathbb{R})$.

2. Queremos demostrar que cualquier función f de la clase $L^1(\mathbb{R})$ se aproxima por las funciones del conjunto $\mathcal{S}_0$. Empecemos con el caso cuando f es positiva, esto es, $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu, [0, +\infty))$. Para cada n en $\mathbb{N}$ definimos $g_n \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ como

$$g_n(x) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n}, & f(x) < n; \\ n, & f(x) \geq n. \end{cases}$$

Es fácil verificar que $g_n \in \mathcal{S}_0$. Además, se puede probar que para cada x en $\mathbb{R}$ la sucesión $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y tiende a $f(x)$. Por el teorema de la convergencia monótona,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu,$$

esto es, $\lim_{n \to \infty} \|g_n - f\|_1 = 0$.

3. Consideremos el caso general, $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu, \mathbb{C})$. Podemos escribir f como una combinación lineal de cuatro funciones positivas $h_1 - h_2 + \mathrm{i}\,(h_3 - h_4)$, donde $h_1, h_2, h_3, h_4 \in L^1(\mathbb{R}, \mu, [0, +\infty))$. A cada una de las funciones h_1, h_2, h_3, h_4 aplicamos el resultado del inciso 2, y obtenemos el resultado. □

Definición 5 (funciones escalonadas asociadas a intervalos abiertos)**.** Denotemos por $\mathcal{S}_1$ al conjunto clases de equivalencia de las funciones de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{1}_{(\alpha_k,\beta_k)},$$

donde $m \in \mathbb{N}_0$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_k < \beta_k$ para cada k en $\{1, \ldots, m\}$.

Ejercicio 6. En lo que sigue, identificamos las funciones de clase $\mathcal{S}_1$ con sus clases de equivalencia. Muestre que $\mathcal{S}_1$ es un subespacio vectorial de $L^1(\mathbb{R})$.

Observación 7. Las funciones indicadoras de los intervalos de la forma $[\alpha, \beta)$, $[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta]$ coinciden μ-ctp. con la función indicadora de (α, β). En este tema, tratamos estas funciones como elementos de $L^1(\mathbb{R})$; es decir, pasamos de funciones a sus clases de equivalencia. Por lo tanto, en la Definición 5 consideramos solamente intervalos de la forma (a, b).

Lema 8 (aproximación de la función indicadora de un conjunto medible por funciones escalonadas)**.** *Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < +\infty$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe g en $\mathcal{S}_1$ tal que*

$$\|g - \mathbb{1}_A\|_1 < \varepsilon.$$

Demostración. Usando la propiedad regular por arriba de la medida de Lebesgue, encontramos un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que

$$A \subseteq B, \qquad \mu(B \setminus A) < \varepsilon/2.$$

Notemos que B se puede representar como una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos:

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k).$$

Como $\mu(B) \leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} < +\infty$, la serie converge. Elegimos p tal que

$$\mu(B) - \sum_{k=1}^{p} \mu((a_k, b_k)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Denotemos por C a la unión de los primeros p intervalos de esta sucesión de intervalos:

$$C \coloneqq \sum_{k=1}^{p} (a_k, b_k).$$

Entonces, tenemos que $\mu(B \setminus C) < \varepsilon/2$. Ahora acotemos el conjunto $A \triangle C$:

$$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C) = (B \setminus A) \cup (B \setminus C),$$

Un razonamiento alterno:

$$A\triangle C = (C \setminus A) \cup (A \setminus C) = (B \setminus A) \cup (B \setminus C),$$

Usando esta acotación del conjunto $A\triangle C$, acotamos su medida:

$$\mu(A\triangle C) \leq \mu(B \setminus A) + \mu(B \setminus C) < \varepsilon.$$

Luego

$$\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_C\|_1 = \mu(A \setminus C) + \mu(C \setminus A) = \mu(A\triangle C) < \varepsilon.$$

Finalmente, notamos que

$$\mathbb{1}_C = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{1}_{(a_k,b_k)} \in \mathcal{S}_1. \qquad \square$$

Teorema 9 (densidad de las funciones escalonadas en $L^1(\mathbb{R})$)**.** *$\mathcal{S}_1$ es un subconjunto denso de $L^1(\mathbb{R})$.*

Demostración. Vamos a demostrar que $\mathcal{S}_0 \subseteq \operatorname{clos}(\mathcal{S}_1)$. Entonces, debido al Lema 4, tendremos que $\operatorname{clos}(\mathcal{S}_0) = \operatorname{clos}(\mathcal{S}_1) = L^1(\mathbb{R})$.

Sea $f \in \mathcal{S}_0$. Por definición, f es una combinación lineal finita de la forma

$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando el Lema 8, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ encontramos g_j en $\mathcal{S}_1$ tal que

$$\|\mathbb{1}_{A_j} - g_j\|_1 < \frac{1}{m(|c_j| + 1)}.$$

Pongamos

$$h \coloneqq \sum_{j=1}^{m} c_j g_j.$$

Entonces, $h \in \mathcal{S}_1$ y $\|f - h\|_1 < \varepsilon$. $\square$