Núcleos aproximativos sobre el eje real

Definición 1. Una familia $(K_t)_{t>0}$ en $L^1(\mathbb{R})$ se llama *núcleo aproximativo* si

- $\sup_{t>0} \|K_t\|_1 < +\infty$;
- para cada $t > 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} K_t(x)\,\mathrm{d}x = 1$;
- para cada $\delta > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(x)|\,\mathrm{d}x = 0$.

Definición 2. Una familia $(K_t)_{t>0}$ en $L^1(\mathbb{R})$ se llama *familia de Dirac* si

- para cada $t > 0$ y cada x en $\mathbb{R}$, $K_t(x) \geq 0$;
- para cada $t > 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} K_t(x)\,\mathrm{d}x = 1$;
- para cada $\delta > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_t(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Observación 3. Cada familia de Dirac es un núcleo aproximativo.

Observación 4. En las definiciones suponemos que el conjunto de índices es $(0, +\infty)$, y en la tercera condición consideramos límites cuando t tiende a 0. De manera más general, podríamos suponer que el conjunto de índices es un conjunto dirigido y trabajar con el límite de la red.

Proposición 5 (repaso)**.** *Sea $g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\lim_{L\to+\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus(-L,L)} |g(y)|\,\mathrm{d}y = 0.$$

Proposición 6. *Sea $g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $g(x) \geq 0$ y $\|g\|_1 = 1$. Para cada $t > 0$ pongamos*

$$K_t(x) = \frac{1}{t} g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Entonces la familia $(K_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Con el cambio de variable $y = x/t$ obtenemos

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} K_t(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta/t,\delta/t)} g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Como $g \in L^1(\mathbb{R})$, la última integral tiende a 0 cuando t tiende a 0. $\square$

Proposición 7 (el núcleo de Gauss–Weierstrass)**.** *La familia de funciones* $(H_t)_{t>0}$*, donde*

$$H_t(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}},$$

es una familia de Dirac.

Demostración. Sea $g(x) \coloneqq \mathrm{e}^{-\pi x^2}$. Entonces

$$\frac{1}{s} g\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-\pi x^2/s}.$$

Por la proposición anterior, esta familia de funciones es una familia de Dirac. Haciendo un cambio de variable $s = \sqrt{4\pi t}$ obtenemos la familia

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} g\left(\frac{x}{\sqrt{4\pi t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} = H_t(x).$$

Si $t \to 0$, entonces $\sqrt{4\pi t} \to 0$, así que la familia $(H_t)_{t>0}$ también es de Dirac. $\square$

Proposición 8. *Sea* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *una función acotada y uniformemente continua, y sea* $(K_t)_{t>0}$ *un núcleo aproximativo. Entonces*

$$\lim_{t\to 0} \|f * K_t - f\|_\infty = 0.$$

Demostración. Denotemos por ω_f al indicador de continuidad uniforme de f:

$$\omega_f(\delta) \coloneqq \sup\bigl\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \le \delta\bigr\}.$$

Para cada $t > 0$ y cada $x \in \mathbb{R}$,

$$|(f * K_t)(x) - f(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)|\,|f(x - y) - f(x)|\,\mathrm{d}y. \qquad (1)$$

Para cada $\delta > 0$, dividimos la última integral en dos partes. Para los valores pequeños de y acotamos la diferencia de los valores de f por el indicador de continuidad uniforme, y para los valores grandes de y acotamos f por su norma-supremo:

$$\begin{aligned}|(f * K_t)(x) - f(x)| &\le \int\limits_{(-\delta,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\,|K_t(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |f(x-y) - f(y)|\,|K_t(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\le \omega_f(\delta) \sup_{t>0} \|K_t\|_1 + 2\|f\|_\infty \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la hipótesis que f es uniformemente continua, elegimos $\delta > 0$ tal que

$$\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2\sup_{t>0} \|K_t\|_1}.$$

Luego elegimos $t_0 > 0$ tal que para cada t en $(0, t_0)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\,\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty + 1}.$$

Entonces para cada t en $(0, t_0)$ y cada x en $\mathbb{R}$ obtenemos

$$|(f * K_t)(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad \square$$

Definición 9. Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y sea $h \in \mathbb{R}$. Denotemos por $\tau_h f$ a la función

$$(\tau_h f)(x) \coloneqq f(x-h).$$

Proposición 10. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $h \in \mathbb{R}$. Entonces $\tau_h f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\|\tau_h f\|_1 = \|f\|_1$.*

Demostración. Hacemos un cambio de variable en la integral usando el hecho que la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones. $\square$

Proposición 11. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_1 = 0.$$

Demostración. 1. Primero consideramos el caso particular cuando f es continua y de soporte compacto: $f \in C_c(\mathbb{R})$. Sea L tal que $f(x) = 0$ para cada x en $\mathbb{R} \setminus (-L, L)$. Entonces

$$\|\tau_h f - f\|_1 \le \int\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)|\,\mathrm{d}x \le 2L\omega_f(|h|).$$

Como f es uniformemente continua, la última expresión tiende a 0 cuando h tiende a 0.

2. Ahora consideremos el caso general: $f \in L^1(\mathbb{R})$. Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que $\|f - g\|_1 < \varepsilon/3$. Usando el resultado de la primera parte de la demostración, encontramos $\delta > 0$ tal que para cada h en $\mathbb{R}$ con $|h| < \delta$ se cumple $\|g - \tau_h g\|_1 < \varepsilon/3$. Entonces para cada h con $|h| < \delta$ obtenemos

$$\|\tau_h f - f\|_1 \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_1 + \|\tau_h g - g\|_1 + \|g - f\|_1 < \varepsilon. \qquad \square$$

Proposición 12. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo. Entonces*

$$\lim_{t\to 0} \|f * K_t - f\|_1 = 0.$$

Demostración. Como ya vimos en (1),

$$|(f * K_t)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)|\, |(\tau_y f)(x) - f(x)| \,\mathrm{d}y.$$

Integramos sobre x e intercambiamos las integrales usando el teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned}
\|f * K_t - f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K_t(y)|\, |(\tau_y f)(x) - f(x)| \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K_t(y)|\, |(\tau_y f)(x) - f(x)| \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)|\, \|\tau_y f - f\|_1 \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Para cada $\delta > 0$ podemos dividir la última integral en dos partes:

$$\begin{aligned}
\|f * K_t - f\|_1 &\leq \int_{(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\, \|\tau_y f - f\|_1 \,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)|\, |\tau_y f - f\|_1 \,\mathrm{d}y \\
&\leq \sup_{t>0} \|K_t\|_1 \cdot \sup_{y\in(-\delta,\delta)} \|\tau_y f - f\|_1 + 2\|f\|_1 \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)| \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la Proposición 11 encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{y\in(-\delta,\delta)} \|\tau_y f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2 \sup_{t>0} \|K_t\|_1}.$$

Luego aplicando la definición del núcleo aproximativo encontramos $t_0 > 0$ tal que para cada t en $(0, t_0)$

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(y)| \,\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_1 + 1}.$$

Entonces para cada t en $(0, t_0)$ obtenemos $\|f * K_t - f\|_1 < \varepsilon$. $\square$

Proposición 13 (convolución con el núcleo de calor, repaso)**.** *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R})$*. Entonces*

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-4\pi^2 t\xi^2}\, \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi.$$

Teorema 14 (la propiedad inyectiva de la transformada de Fourier)**.** *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *tal que* $\widehat{f} = 0$*. Entonces* $f = 0$ *c.t.p.*

Demostración. Por la Proposición 13, $f * H_t = 0$ para cada $t > 0$. Luego, para cada $t > 0$,

$$\|f\|_1 \le \|f - f * H_t\|_1 + \|f * H_t\|_1 = \|f - f * H_t\|_1.$$

Por la Proposición 12, la última expresión tiende a 0 cuando t tiende a 0. Pasando al límite concluimos que $\|f\|_1 = 0$. $\square$

Tarea 15. Sean $p \in (1, +\infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, y sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo. Demostrar que

$$\lim_{t\to 0} \|f * K_t - f\|_p = 0.$$