Estructura del curso
Análisis Matemático II

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

23 de febrero de 2021

1. Información general
2. Temas preliminares
3. Medidas y funciones medibles
4. Extensión de medidas
5. Modos de convergencia
6. Integral de Lebesgue
7. Espacios L^p

Objetivo del curso:

estudiar el concepto de la integral de Lebesgue respecto a una medida abstracta.

Prerrequsitos:

- operaciones con conjuntos ($\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\triangle$) y demostración de sus propiedades;
- operaciones con familias de conjuntos;
- preimágenes de conjuntos bajo funciones;

- el eje real extendido;
- cotas superiores e inferiores, supremos e ínfimos;

- la definición del límite;
- convergencia de series de números;
- convergencia uniforme de sucesiones de funciones;
- espacios métricos y normados.

Aplicaciones:

- teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales,
- incluso las ecuaciones de mecánica cuántica,

- operadores integrales, incluso operadores de convolución,
- análisis armónico (integral de Fourier y series de Fourier),
- análisis funcional,

- teoría de probabilidad,
- teoría de procesos estocásticos.

Bibliografía principal I

- Walter Rudin,
  Real and Complex Analysis.
  McGrow-Hill, 1987.

- Halsey L. Royden, Patrick Fitzpatrick,
  Real Analysis. 4th ed.
  Prentice Hall, 2010.

- Gerald B. Folland,
  Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications. 2nd ed.
  Wiley, 1999.

Bibliografía principal II

Paul R. Halmos,
Measure Theory.
Litton, 1950. Springer-Verlag, 1974.

José María Rocha Martínez,
Un primer curso de integración de Lebesgue en Rn,
IPN.

Bernard R. Gelbaum, John M. H. Olmsted,
Counterexamples in Analysis.
Dover Publications, 1992.

Actividades para la evaluación

- Tres exámenes escritos, entregar por Google Classroom.
- Tareas simples, con muchos ejercicios numéricos,
  resolver en equipos de 3 personas, entregar por Google Classroom,
  de preferencia escribir en LaTeX.
- Exposiciones en clase (temas del programa),
  preparar y exponer en equipos de 2 o 3 personas,
  escribir presentaciones en LaTeX+beamer o a mano.
- Tareas adicionales (temas fuera del programa),
  resolver por equipos de 2 o 3 personas,
  escribir en LaTeX o a mano.

Temario del curso

- Temas preliminares.
- Medida abstracta y funciones medibles.
- Extensión de medidas.
- Modos de convergencia de sucesiones de funciones.
- Integración abstracta.
- Espacios L^p.

Temas preliminares

- Lógica del orden 0: $\wedge, \vee, \oplus, \to, \leftrightarrow$.
- Operaciones con conjuntos: $\cap, \cup, \triangle$, la contención e igualdad.

- Lógica del orden 1: $\forall, \exists$.
- Operaciones con familias de conjuntos.

- Familias monótonas de conjuntos.
- Estructura de sucesiones monótonas de conjuntos:

  si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow$, $\quad D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}$, entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n = \bigcup_{k=1}^{n} D_k, \qquad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$$

Temas preliminares

- El eje real extendido, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- Cotas superiores e inveriores de conjuntos.
- Supremos e ínfimos de conjuntos.
- Supremos e ínfimos de funciones.

- La topología del eje real.
- La topología del eje real extendido.

- Límites de sucesiones monótonas, Límites de funciones monótonas.
- Límites superiores e inferiores.

Sigma-álgebras de conjuntos

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F} \subseteq 2^X$.
Se dice que $\mathcal{F}$ es una **σ-álgebra** si

1) $\varnothing \in \mathcal{F}$,
2) $\forall A \in \mathcal{F} \quad X \setminus A \in \mathcal{F}$,
3) $\forall (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \qquad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}$.

El par $(X, \mathcal{F})$ se llama **espacio medible**.

Sigma-álgebras generadas por colecciones de conjuntos

Si $\mathcal{G} \subseteq 2^X$, entonces la σ-álgebra sobre X generada por $\mathcal{G}$ se define como la intersección de todas las σ-álgebras sobre X que contienen a $\mathcal{G}$.

Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la σ-álgebra generada por τ se llama la σ-álgebra de Borel de este espacio topológico.

Medidas

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible.

Una función $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ se llama medida, si

1) $\mu(\varnothing) = 0$,
2) μ es σ-aditiva:
para cualquier sucesión disjunta $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$,

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Propiedades de medidas

Medida de la unión e intersección: si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

La medida del complemento: si $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B$, entonces

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B).$$

Propiedad creciente: si $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Propiedades de medidas

Continuidad por abajo: si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ y $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Propiedad subaditiva para sucesiones: si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Funciones medibles

Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles.

Una función $f\colon X \to Y$ se llama $\mathcal{F}$-$\mathcal{H}$-medible si

$$\forall B \in \mathcal{H} \qquad f^{-1}[B] \in \mathcal{F}.$$

Notación: $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$.

Criterio de funciones reales medibles

(el codominio $\mathbb{R}$ se considera con la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$):

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^X\colon \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad f^{-1}[(a, +\infty)] \in \mathcal{F}\}.$$

El álgebra de funciones medibles

La clase $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ es cerrada bajo:

- las operaciones algebraicas punto a punto,
- los supremos e ínfimos de sucesiones de funciones,
- los límites puntuales de sucesiones de funciones.

Anillos, semianillos, etc.

Además de σ-álgebras, se consideran otras clases de colecciones de conjuntos:

- semianillo de conjuntos,
- semiálgebras de conjuntos,
- anillos de conjuntos,
- álgebras de conjuntos,
- clases monótonas.

Extensión de medidas

Dada una premedida en un semianillo de conjuntos,
vamos a extenderla a la σ-álgebra generada.

Usaremos el concepto de medidas exteriores y la construcción de Caratheodory.

La longitud primero se define en intervalos:

$$\lambda([a, b)) := b - a \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b).$$

Los intervalos forman un semianillo.
Con la construcción de Caratheodory definiremos la medida de Lebesgue.

Varios modos de convergencia de sucesiones de funciones

Convergencia puntual:

$$f_n \xrightarrow{X} g \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Convergencia uniforme:

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Criterio de la convergencia uniforme, en términos de la norma-supremo:

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)| = 0.$$

Convergencia en medida, casi en todas partes, casi uniforme

Convergencia en medida:

$$f_n \xrightarrow{\mu} g \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Convergencia μ-c.t.p.:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \mu(\{x \in X\colon\ f_n(x) \not\to g(x)\}) = 0.$$

Convergencia μ-c.u. (de Egórov):

$$f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \Big(\mu(E) < \eta \quad \wedge \quad f_n \xRightarrow{X\setminus E} g\Big).$$

Conjuntos auxiliares

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k),$$

$$D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon).$$

Varios modos de convergencia, en términos de los conjuntos auxiliares

$$f_n \xrightarrow{X} g \quad\iff\quad D = \varnothing,$$

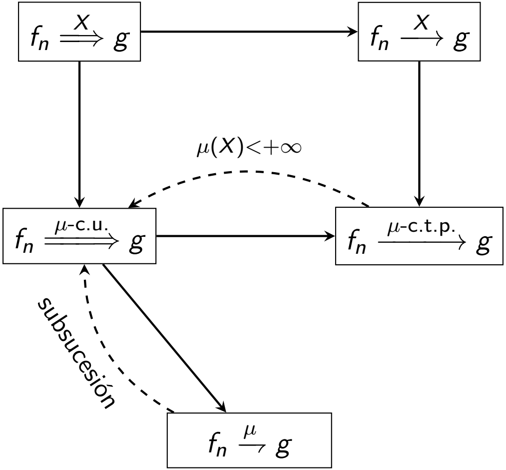
$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \quad\iff\quad \mu(D) = 0,$$

$$f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \quad\iff\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) = \varnothing,$$

$$f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\Longrightarrow} g \quad\iff\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0,$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} g \quad\iff\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = 0.$$

Varios modos de convergencia



Integral de Lebesgue para funciones simples positivas medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, donde $v_1 < v_2 < \cdots < v_m$.

Definimos

$$A_k := f^{-1}[\{v_k\}].$$

Definimos

$$\boxed{\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{m} v_k \mu(A_k).}$$

Integral de Lebesgue

La integral de Lebesgue primero se define para una clase pequeña de funciones, luego se extiende a funciones más generales.

En este curso, las etapas serán las siguientes:

(1) primero, para las funciones simples positivas medibles,

(2) luego, para las funciones positivas medibles,

(3) luego, para las funciones reales medibles,

(4) finalmente, para las funciones complejas medibles.

Convergencia de integrales

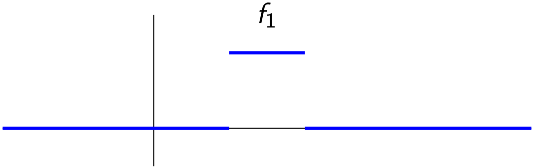
La convergencia puntual, $f_n \xrightarrow{X} g$, en general, no garantiza que $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $\mu =$ la medida de Lebesgue, $f_n = 1_{[n,n+1)}$, $g = 0$.

Convergencia de integrales

La convergencia puntual, $f_n \xrightarrow{X} g$, en general, no garantiza que $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

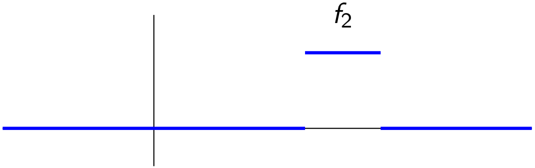
Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $\mu =$ la medida de Lebesgue, $f_n = 1_{[n,n+1)}$, $g = 0$.



Convergencia de integrales

La convergencia puntual, $f_n \xrightarrow{X} g$, en general, no garantiza que $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $\mu =$ la medida de Lebesgue, $f_n = 1_{[n,n+1)}$, $g = 0$.



Convergencia de integrales

La convergencia puntual, $f_n \xrightarrow{X} g$, en general, no garantiza que $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $\mu =$ la medida de Lebesgue, $f_n = 1_{[n,n+1)}$, $g = 0$.

Convergencia de integrales

La convergencia puntual, $f_n \xrightarrow{X} g$, en general, no garantiza que $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $\mu =$ la medida de Lebesgue, $f_n = 1_{[n,n+1)}$, $g = 0$.

Entonces

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = 1, \qquad \int_X g \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Convergencia de integrales

- Teorema de la convergencia monótona.
- Lema de Fatou.
- Teorema de la convergencia dominada.

Funciones convexas

- Conjuntos convexos.
- Funciones convexas.
- Convexidad de la función exp (definida en $\mathbb{R}$).
- Desigualdad de Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \left(a, b \geq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Espacios L^p

- La seminorma N_p:

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

- La desigualdad de Hölder:

$$N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g).$$

- La desigualdad de Minkowski:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

- La definición del espacio L^p.
- La completez del espacio L^p.