Funciones iguales casi en todas partes

Objetivos. Estudiar el concepto de funciones iguales casi en todas partes. Estudiar situaciones cuando de ciertas propiedades de integrales se pueden deducir igualdades de funciones casi en todas partes.

Requisitos. Medida, propiedad subaditiva de la medida, integración, la parte real e imaginaria de una función compleja, la parte positiva y negativa de una función real.

1. Unión numerable de conjuntos de medida cero (repaso). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que $\mu(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0.$$

2. Definición (casi en todas partes). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $P\colon X \to \{0, 1\}$ un predicado. Se dice que P se cumple μ-c.t.p. si

$$\mu\left(\left\{x \in X\colon\ \text{no } P(x)\right\}\right) = 0.$$

3. Definición (funciones equivalentes). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Se dice que f y g son *iguales casi en todas partes respecto* μ si

$$\mu\left(\left\{x \in X\colon f(x) \neq g(x)\right\}\right) = 0.$$

Notación: $\quad f \overset{\mu}{\sim} g \quad$ o $\quad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} g.$

4. Ejercicio. Para cualquier par de funciones f, g definidas en un conjunto X denotemos por $N_{f,g}$ al conjunto de los puntos de X donde f y g no son iguales:

$$N_{f,g} \coloneqq \left\{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\right\}.$$

Muestre que

$$N_{f,f} = \varnothing, \qquad N_{g,f} = N_{f,g}.$$

Demuestre que para cualesquiera f, g, h se cumple la contención

$$N_{f,g} \subset N_{f,h} \cup N_{h,g}.$$

5. Ejercicio. Usando los resultados del ejercicio anterior demuestre que la relación binaria $\overset{\mu}{\sim}$ es una relación de equivalencia.

Integrales y propiedades que se cumplen casi en todas partes

6. Integrales de funciones iguales casi en todas partes. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ o $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tales que $f \overset{\mu}{\sim} g$. Entonces

$$\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu.$$

7. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Entonces $f < +\infty$ c.t.p.

8. Ejercicio. Sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función $\mathcal{F}$-medible y sea $Y \in \mathcal{F}$ tales que

$$\int_Y f\,d\mu = 0.$$

Demuestre que $f = 0$ casi en todas partes de Y, esto es,

$$\mu\big(\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}\big) = 0.$$

9. Ejercicio. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tal que $\int_Y f\,d\mu = 0$ para todo $Y \in \mathcal{F}$. Demuestre que $f \overset{\mu}{\sim} 0$.

10. Ejercicio. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que $\int_Y f\,d\mu = 0$ para todo $Y \in \mathcal{F}$. Demuestre que $f \overset{\mu}{\sim} 0$.

11. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| = \int_X |f|\,d\mu.$$

Entonces existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha f \overset{\mu}{\sim} |f|$.

Valores de integrales y valores de una función

12. Teorema. Sea $\mu(X) < +\infty$, sea $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y sea S un conjunto cerrado en $\mathbb{C}$. Supóngase que $A_Y(f) \in S$ para cada $Y \in \mathcal{F}$ con $\mu(Y) > 0$, donde

$$A_Y(f) = \frac{1}{\mu(Y)} \int_Y f\,d\mu.$$

Entonces $f(x) \in S$ para casi todos $x \in X$.

13. Sea $\mu(X) < +\infty$, sea $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, Supóngase que para cada $Y \in \mathcal{F}$,

$$\int_Y f\,d\mu \geq 0.$$

Entonces $f(x) \geq 0$ para casi todos $x \in X$.