El álgebra de los operadores lineales acotados en un espacio de Banach (un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

6 de mayo de 2022

Objetivo

Sea X un espacio de Banach.

Mostremos que $\mathcal{B}(X)$ se puede ver como un álgebra de Banach.

Prerrequisitos

- Espacios de Banach.

Prerrequisitos

- Espacios de Banach.
- La norma de un operador lineal.

Prerrequisitos

- Espacios de Banach.
- La norma de un operador lineal.
- El espacio de los operadores lineales acotados.

Prerrequisitos

- Espacios de Banach.
- La norma de un operador lineal.
- El espacio de los operadores lineales acotados.
- Anillos y álgebras.

Prerrequisitos

- Espacios de Banach.
- La norma de un operador lineal.
- El espacio de los operadores lineales acotados.
- Anillos y álgebras.
- El grupo de los elementos invertibles en un anillo.

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$$+\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A};$$

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$$+\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A};$$

$$\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A};$$ en vez de $\lambda \cdot a$ escribimos simplemente λa;

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$+\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;

$\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $\lambda \cdot a$ escribimos simplemente λa;

$\odot\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $a \odot b$ escribimos simplemente ab.

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$$+\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A};$$

$\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A};$ en vez de $\lambda \cdot a$ escribimos simplemente λa;

$\odot\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A};$ en vez de $a \odot b$ escribimos simplemente ab.

Supongamos que

- $(\mathcal{A}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial;

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$$+\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A};$$

$$\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}; \quad \text{en vez de } \lambda \cdot a \text{ escribimos simplemente } \lambda a;$$

$$\odot\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}; \quad \text{en vez de } a \odot b \text{ escribimos simplemente } ab.$$

Supongamos que

- $(\mathcal{A}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial;
- $\xi(a + b) = \xi a + \xi b$ y $(\xi + \eta)a = \xi a + \eta a$ para cada $a, b \in \mathcal{A}$, $\xi, \eta \in \mathbb{F}$,

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$+\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;

$\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $\lambda \cdot a$ escribimos simplemente λa;

$\odot\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $a \odot b$ escribimos simplemente ab.

Supongamos que

- $(\mathcal{A}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial;
- $\xi(a+b) = \xi a + \xi b$ y $(\xi + \eta)a = \xi a + \eta a$ para cada $a, b \in \mathcal{A}$, $\xi, \eta \in \mathbb{F}$,
- $(\xi a)b = a(\xi b) = \xi(ab)$ para cada $a, b \in \mathcal{A}$, $\xi \in \mathbb{F}$.

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$+\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;

$\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $\lambda \cdot a$ escribimos simplemente λa;

$\odot\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $a \odot b$ escribimos simplemente ab.

Supongamos que

- $(\mathcal{A}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial;
- $\xi(a + b) = \xi a + \xi b$ y $(\xi + \eta)a = \xi a + \eta a$ para cada $a, b \in \mathcal{A}$, $\xi, \eta \in \mathbb{F}$,
- $(\xi a)b = a(\xi b) = \xi(ab)$ para cada $a, b \in \mathcal{A}$, $\xi \in \mathbb{F}$.
- $(ab)c = a(bc)$ para cada $a, b, c \in \mathcal{A}$.

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$$+\colon \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A};$$

$$\cdot\colon \mathbb{F}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A};\quad \text{en vez de } \lambda\cdot a \text{ escribimos simplemente } \lambda a;$$

$$\odot\colon \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A};\quad \text{en vez de } a\odot b \text{ escribimos simplemente } ab.$$

Supongamos que

- $(\mathcal{A},\mathbb{F},+,\cdot)$ es un espacio vectorial;
- $\xi(a+b)=\xi a+\xi b$ y $(\xi+\eta)a=\xi a+\eta a$ para cada $a,b\in\mathcal{A}$, $\xi,\eta\in\mathbb{F}$,
- $(\xi a)b=a(\xi b)=\xi(ab)$ para cada $a,b\in\mathcal{A}$, $\xi\in\mathbb{F}$.
- $(ab)c=a(bc)$ para cada $a,b,c\in\mathcal{A}$.

Entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

La identidad en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

La identidad en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

Un elemento e de $\mathcal{A}$ se llama identidad o elemento neutro multiplicativo, si

$$\forall a \in \mathcal{A} \qquad ae = ea = a.$$

La identidad en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

Un elemento e de $\mathcal{A}$ se llama identidad o elemento neutro multiplicativo, si

$$\forall a \in \mathcal{A} \qquad ae = ea = a.$$

Ejercicio (unicidad de la identidad, en caso de su existencia).

Sean $e_1, e_2 \in \mathcal{A}$ tales que e_1 es una identidad de $\mathcal{A}$ y e_2 es una identidad de $\mathcal{A}$.

Demostrar que $e_1 = e_2$.

El concepto de álgebra asociativa con identidad

Adición

$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Mul. por escal.

$\cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Multiplicación

$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

El concepto de álgebra asociativa con identidad

Adición

$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Grupo aditivo

$(\mathcal{A}, +)$

Mul. por escal.

$\cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Multiplicación

$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

El concepto de álgebra asociativa con identidad

Adición
$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Grupo aditivo
$(\mathcal{A}, +)$

Mul. por escal.
$\cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Multiplicación
$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Monoide mult.
$(\mathcal{A}, \odot)$

El concepto de álgebra asociativa con identidad

Adición
$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Grupo aditivo
$(\mathcal{A}, +)$

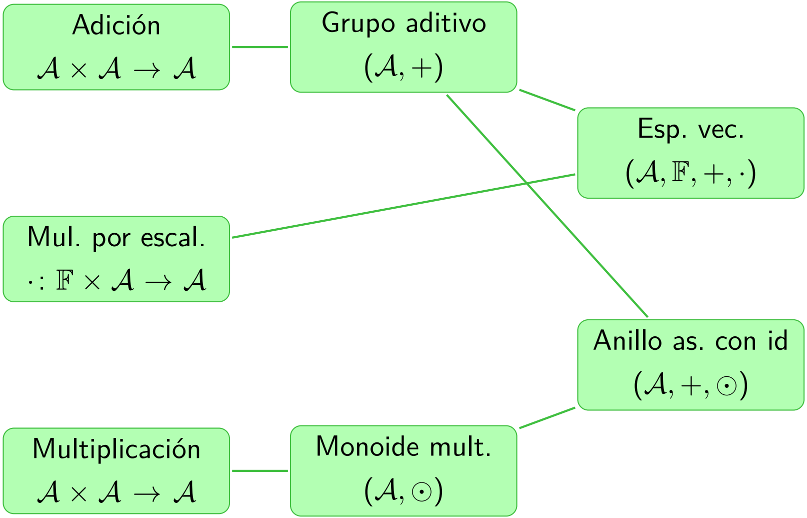
Esp. vec.
$(\mathcal{A}, \mathbb{F}, +, \cdot)$

Mul. por escal.
$\cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

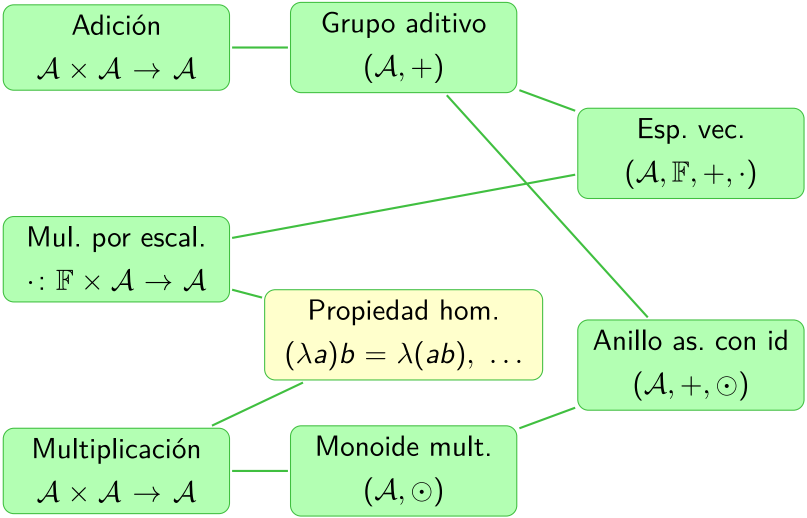
Multiplicación
$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Monoide mult.
$(\mathcal{A}, \odot)$

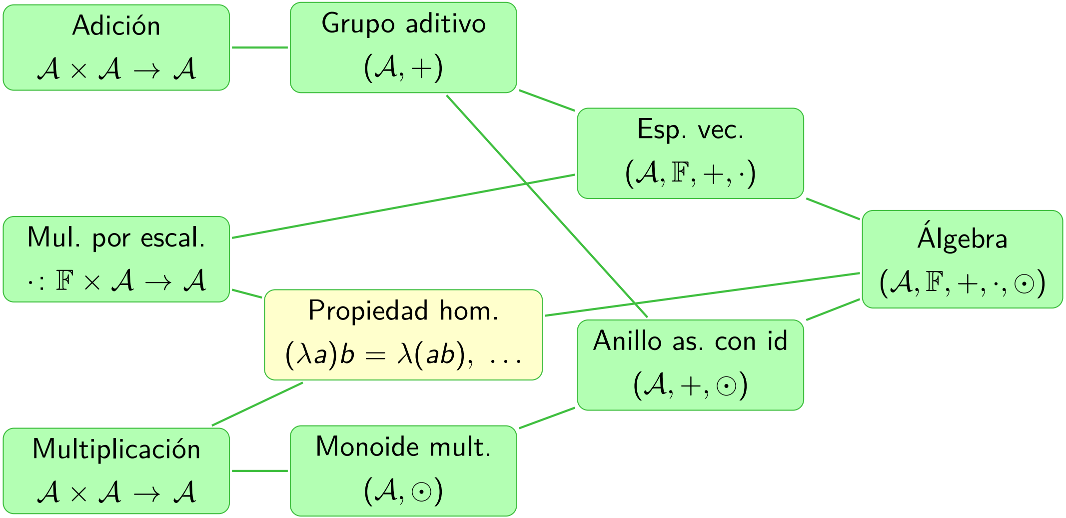
El concepto de álgebra asociativa con identidad



El concepto de álgebra asociativa con identidad



El concepto de álgebra asociativa con identidad



Los elementos invertibles en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

Los elementos invertibles en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene identidad. La denotemos por e.

Los elementos invertibles en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene identidad. La denotemos por e.

Denotemos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{A})$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{A}$:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{A}) := \Big\{a \in \mathcal{A}\colon \quad ab = ba = e\Big\}.$$

Los elementos invertibles en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene identidad. La denotemos por e.

Denotemos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{A})$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{A}$:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{A}) \;:=\; \Big\{a \in \mathcal{A}: \quad ab = ba = e\Big\}.$$

Ejercicio (la unicidad del elemento inverso, en caso de su existencia).
Sean $a, b, c \in \mathcal{A}$. Demostrar que si $ab = ba = e$ y $ac = ca = e$, entonces $b = c$.

Los operadores lineales acotados, el producto de operadores

Sea X un espacio de Banach.

Los operadores lineales acotados, el producto de operadores

Sea X un espacio de Banach.

Pongamos $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$.

Los operadores lineales acotados, el producto de operadores

Sea X un espacio de Banach.

Pongamos $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$.

Definimos en $\mathcal{B}(X)$ la operación de multiplicación como la composición:

$$ST := S \circ T.$$

Los operadores lineales acotados, el producto de operadores

Sea X un espacio de Banach.

Pongamos $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$.

Definimos en $\mathcal{B}(X)$ la operación de multiplicación como la composición:

$$ST := S \circ T.$$

Entonces $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra compleja asociativa:

- es un espacio vectorial,
- $S(T + U) = ST + SU$, $(S + T)U = SU + TU$,
- $(\lambda S)T = S(\lambda T) = \lambda(ST)$,
- $(ST)U = S(TU)$.

$\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach

Si X, Y son espacios normados, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ se considera con la norma

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y.$$

Sabemos que $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio normado.

$\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach

Si X, Y son espacios normados, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ se considera con la norma

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y .$$

Sabemos que $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio normado.

Más aún, si Y es completo, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ es completo.

$\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach

Si X, Y son espacios normados, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ se considera con la norma

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y.$$

Sabemos que $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio normado.

Más aún, si Y es completo, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ es completo.

Conclusión: si X es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(X)$ es

$\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach

Si X, Y son espacios normados, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ se considera con la norma

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y .$$

Sabemos que $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio normado.

Más aún, si Y es completo, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ es completo.

Conclusión: si X es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach.

La norma en $\mathcal{B}(X)$ es submultiplicativa

Proposición

Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces
$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

La norma en $\mathcal{B}(X)$ es submultiplicativa

Proposición

Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces
$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

Demostración. En efecto, si $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$, entonces

$$\|(ST)(x)\|_X = \|S(T(x))\|_X \leq \|S\| \, \|Tx\|_X \leq \|S\| \, \|T\| \, \|x\|_X \leq \|S\| \, \|T\|.$$

El operador identidad

El operador de identidad $I\colon X \to X$ es un elemento neutro del álgebra $\mathcal{B}(X)$.

El operador identidad

El operador de identidad $I\colon X \to X$ es un elemento neutro del álgebra $\mathcal{B}(X)$.

En otras palabras, para cada S en $\mathcal{B}(X)$,

$$S\,I = I\,S = S.$$

El operador identidad

El operador de identidad $I\colon X \to X$ es un elemento neutro del álgebra $\mathcal{B}(X)$.

En otras palabras, para cada S en $\mathcal{B}(X)$,

$$S\,I = I\,S = S.$$

Además, $\|I\| = 1$.

Álgebra de Banach con identidad

Definición (álgebra de Banach con identidad)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja asociativa y al mismo tiempo un espacio de Banach.

Supongamos que la norma es submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|.$$

Además, supongamos que $\mathcal{A}$ tiene un elemento neutro e y $\|e\| = 1$.

Entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad.

Álgebra de Banach con identidad

Definición (álgebra de Banach con identidad)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja asociativa y al mismo tiempo un espacio de Banach.

Supongamos que la norma es submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|.$$

Además, supongamos que $\mathcal{A}$ tiene un elemento neutro e y $\|e\| = 1$.

Entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad.

Proposición

Sea X un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach.

El concepto de álgebra de Banach con identidad

Monoide

$(\mathcal{A}, \odot)$

Esp. vec.

$(\mathcal{A}, \mathbb{C}, +, \cdot)$

Norma

$\| \cdot \|$

El concepto de álgebra de Banach con identidad

Monoide

$(\mathcal{A}, \odot)$

Álgebra as. con id.

$(\mathcal{A}, \mathbb{C}, +, \cdot, \odot)$

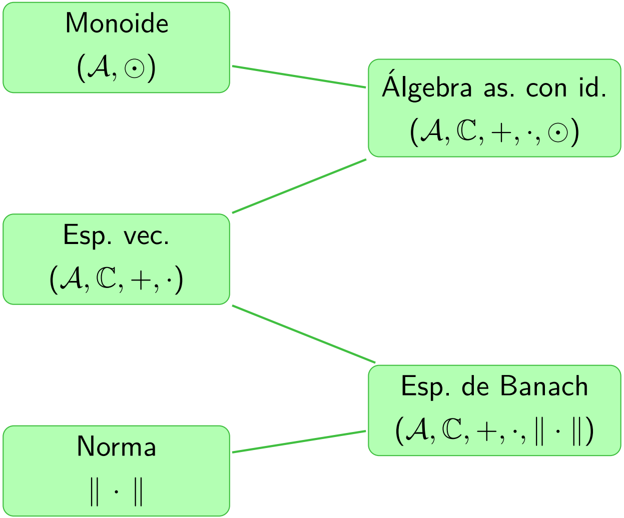
Esp. vec.

$(\mathcal{A}, \mathbb{C}, +, \cdot)$

Norma

$\| \cdot \|$

El concepto de álgebra de Banach con identidad



El concepto de álgebra de Banach con identidad

Monoide
$(\mathcal{A}, \odot)$

Esp. vec.
$(\mathcal{A}, \mathbb{C}, +, \cdot)$

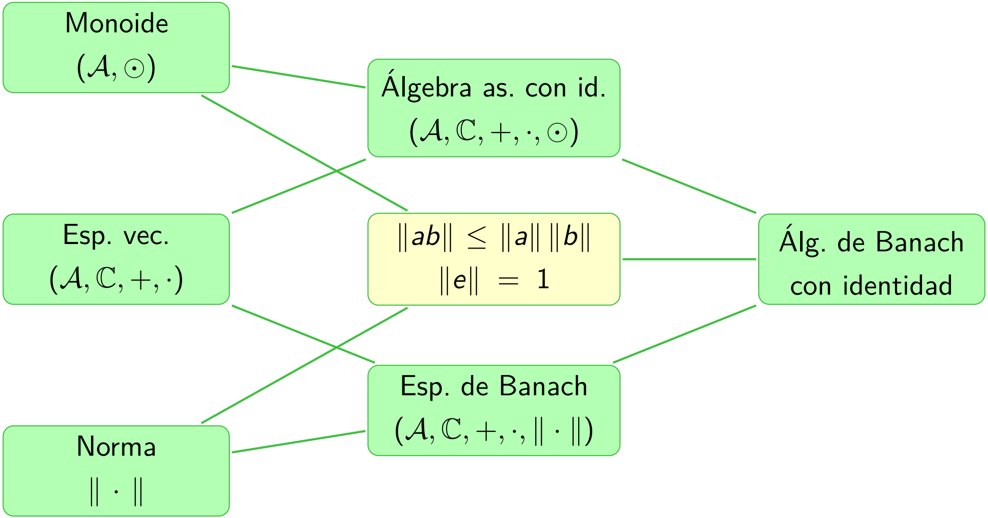
Norma
$\| \cdot \|$

Álgebra as. con id.
$(\mathcal{A}, \mathbb{C}, +, \cdot, \odot)$

$\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$
$\|e\| = 1$

Esp. de Banach
$(\mathcal{A}, \mathbb{C}, +, \cdot, \| \cdot \|)$

El concepto de álgebra de Banach con identidad



La multiplicación de operadores es continua

Proposición

La función $M\colon \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$, definida mediante la regla $M(S, T) := ST$, es continua.

La multiplicación de operadores es continua

Proposición

La función $M\colon \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$, definida mediante la regla $M(S, T) := ST$, es continua.

Idea de demostración.

Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, encontrar un $\delta > 0$ tal que

si $A, B \in \mathcal{B}(X)$, $\|A - S\| < \delta$ y $\|B - T\| < \delta$, entonces $\|AB - ST\| < \varepsilon$.

La multiplicación de operadores es continua

Proposición

La función $M\colon \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$, definida mediante la regla $M(S, T) := ST$, es continua.

Idea de demostración.

Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, encontrar un $\delta > 0$ tal que
si $A, B \in \mathcal{B}(X)$, $\|A - S\| < \delta$ y $\|B - T\| < \delta$, entonces $\|AB - ST\| < \varepsilon$.

Un paso auxiliar: acotar $\|A\|$ en términos de $\|S\|$ y δ.

La multiplicación de operadores es continua

Proposición

La función $M\colon \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$, definida mediante la regla $M(S, T) := ST$, es continua.

Idea de demostración.

Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, encontrar un $\delta > 0$ tal que si $A, B \in \mathcal{B}(X)$, $\|A - S\| < \delta$ y $\|B - T\| < \delta$, entonces $\|AB - ST\| < \varepsilon$.

Un paso auxiliar: acotar $\|A\|$ en términos de $\|S\|$ y δ.

Un paso auxiliar: verificar la identidad

$$AB - ST = A(B - T) + (A - S)T.$$

La multiplicación de operadores es continua, en el lenguaje de sucesiones

Ejercicio.

Sean $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}, (B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X)^{\mathbb{N}}$ y $S, T \in \mathcal{B}(X)$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} A_k = S, \qquad \lim_{k\to\infty} B_k = T.$$

Demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} (A_k B_k) = ST.$$

La multiplicación de operadores es continua, en el lenguaje de sucesiones

Ejercicio.

Sean $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}, (B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X)^{\mathbb{N}}$ y $S, T \in \mathcal{B}(X)$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} A_k = S, \qquad \lim_{k\to\infty} B_k = T.$$

Demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} (A_k B_k) = ST.$$

Aunque este resultado se sigue de la proposición anterior,
se recomienda demostrarlo de manera independiente.

Operadores invertibles

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Operadores invertibles

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Ejercicio. Recordar la demostración de la unicidad del operador inverso.

Operadores invertibles

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Ejercicio. Recordar la demostración de la unicidad del operador inverso.

Denotamos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{B}(X)$:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \Big\{ S \in \mathcal{B}(X) \colon \quad \exists T \in \mathcal{B}(X) \quad ST = I \quad \wedge \quad TS = I \Big\}.$$

Operadores invertibles

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Ejercicio. Recordar la demostración de la unicidad del operador inverso.

Denotamos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{B}(X)$:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \Big\{ S \in \mathcal{B}(X) \colon \quad \exists T \in \mathcal{B}(X) \quad ST = I \quad \wedge \quad TS = I \Big\}.$$

Debido al teorema de Banach–Schauder sobre la transformación lineal abierta,
si $S \in \mathcal{B}(X)$ y S es biyectiva, entonces $S \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$.

Invertibilidad por la izquierda o por la derecha

Ejercicio. Mostrar que la invertibilidad por un lado no implica la invertibilidad por otro lado. Recordar un ejemplo, cuando $S, T \in \mathcal{B}(X)$, $ST = I$, pero $TS \neq I$.

Invertibilidad por la izquierda o por la derecha

Ejercicio. Mostrar que la invertibilidad por un lado no implica la invertibilidad por otro lado. Recordar un ejemplo, cuando $S, T \in \mathcal{B}(X)$, $ST = I$, pero $TS \neq I$.

Ejercicio. Para $X = \mathbb{C}^n$, $\mathcal{B}(X)$ se puede identificar con $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Recordar una demostración del siguiente teorema de álgebra lineal:

$$AB = I_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad BA = I_n.$$

Los operadores invertibles forman un grupo

Es fácil ver que si $S \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, entonces $S^{-1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$.

Los operadores invertibles forman un grupo

Es fácil ver que si $S \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, entonces $S^{-1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$.

Proposición

$\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ con la operación de composición es un grupo.

La operación de inversión

Definimos

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \mathrm{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\mathrm{inv}(I) =$

La operación de inversión

Definimos

$$\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \operatorname{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\operatorname{inv}(I) = I$.

La operación de inversión

Definimos

$$\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \operatorname{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\operatorname{inv}(I) = I$.
2. Para cualesquiera S, T en $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\quad \operatorname{inv}(ST) =$

La operación de inversión

Definimos

$$\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \operatorname{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\operatorname{inv}(I) = I$.
2. Para cualesquiera S, T en $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\quad \operatorname{inv}(ST) = \operatorname{inv}(T)\operatorname{inv}(S)$.

La operación de inversión

Definimos

$$\operatorname{inv}\colon\ \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \operatorname{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\operatorname{inv}(I) = I$.
2. Para cualesquiera S, T en $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\quad \operatorname{inv}(ST) = \operatorname{inv}(T)\operatorname{inv}(S)$.
3. Para cualquier S en $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\quad \operatorname{inv}(\operatorname{inv}(S)) =$

La operación de inversión

Definimos

$$\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \operatorname{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\operatorname{inv}(I) = I$.
2. Para cualesquiera S, T en $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\quad \operatorname{inv}(ST) = \operatorname{inv}(T)\operatorname{inv}(S)$.
3. Para cualquier S en $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\quad \operatorname{inv}(\operatorname{inv}(S)) = S$.

El inverso de un múltiplo no nulo de un operador invertible

Ejercicio. Sea $T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Demostrar que $\lambda T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y

$$(\lambda T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\, T^{-1}.$$

Planes para futuro

Pronto demostraremos que el conjunto $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es abierto y la función inv es continua.