El álgebra de los operadores lineales acotados en un espacio de Banach (un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

12 de diciembre de 2025

Objetivo

Sea X un espacio de Banach.

Mostremos que $\mathcal{B}(X)$ se puede ver como un álgebra de Banach.

Prerrequisitos

- Espacios de Banach.

Prerrequisitos

- Espacios de Banach.
- La norma de un operador lineal.

Prerrequisitos

- Espacios de Banach.
- La norma de un operador lineal.
- El espacio de los operadores lineales acotados.

Prerrequisitos

- Espacios de Banach.
- La norma de un operador lineal.
- El espacio de los operadores lineales acotados.
- Anillos y álgebras.

Prerrequisitos

- Espacios de Banach.
- La norma de un operador lineal.
- El espacio de los operadores lineales acotados.
- Anillos y álgebras.
- El grupo de los elementos invertibles en un anillo.

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$+ \colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$+ \colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;

$\cdot \colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $\lambda \cdot a$ escribimos simplemente λa;

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$+ \colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;

$\cdot \colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $\lambda \cdot a$ escribimos simplemente λa;

$\odot \colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $a \odot b$ escribimos simplemente ab.

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$+ \colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;

$\cdot \colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $\lambda \cdot a$ escribimos simplemente λa;

$\odot \colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $a \odot b$ escribimos simplemente ab.

Supongamos que

- $(\mathcal{A}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial;

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$+ \colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;

$\cdot \colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $\lambda \cdot a$ escribimos simplemente λa;

$\odot \colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $a \odot b$ escribimos simplemente ab.

Supongamos que

- $(\mathcal{A}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial;
- $(a+b)c = ac + bc$ y $c(a+b) = ca + cb$ para cada $a, b, c \in \mathcal{A}$,

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$+\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;

$\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $\lambda \cdot a$ escribimos simplemente λa;

$\odot\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $a \odot b$ escribimos simplemente ab.

Supongamos que

- $(\mathcal{A}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial;
- $(a+b)c = ac + bc$ y $c(a+b) = ca + cb$ para cada $a, b, c \in \mathcal{A}$,
- $(\xi a)b = a(\xi b) = \xi(ab)$ para cada $a, b \in \mathcal{A}$, $\xi \in \mathbb{F}$.

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$+\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;

$\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $\lambda \cdot a$ escribimos simplemente λa;

$\odot\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $a \odot b$ escribimos simplemente ab.

Supongamos que

- $(\mathcal{A}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial;
- $(a+b)c = ac + bc$ y $c(a+b) = ca + cb$ para cada $a, b, c \in \mathcal{A}$,
- $(\xi a)b = a(\xi b) = \xi(ab)$ para cada $a, b \in \mathcal{A}$, $\xi \in \mathbb{F}$.
- $(ab)c = a(bc)$ para cada $a, b, c \in \mathcal{A}$.

El concepto de álgebra asociativa (repaso)

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Supongamos que están definidas tres operaciones:

$+\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;

$\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $\lambda \cdot a$ escribimos simplemente λa;

$\odot\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$; en vez de $a \odot b$ escribimos simplemente ab.

Supongamos que

- $(\mathcal{A}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial;
- $(a+b)c = ac + bc$ y $c(a+b) = ca + cb$ para cada $a, b, c \in \mathcal{A}$,
- $(\xi a)b = a(\xi b) = \xi(ab)$ para cada $a, b \in \mathcal{A}$, $\xi \in \mathbb{F}$.
- $(ab)c = a(bc)$ para cada $a, b, c \in \mathcal{A}$.

Entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

La identidad en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

La identidad en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

Un elemento e de $\mathcal{A}$ se llama identidad o elemento neutro multiplicativo, si

$$\forall a \in \mathcal{A} \qquad ae = ea = a.$$

La identidad en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

Un elemento e de $\mathcal{A}$ se llama identidad o elemento neutro multiplicativo, si

$$\forall a \in \mathcal{A} \qquad ae = ea = a.$$

Ejercicio (unicidad de la identidad, en caso de su existencia).
Sean $e_1, e_2 \in \mathcal{A}$ tales que e_1 es una identidad de $\mathcal{A}$ y e_2 es una identidad de $\mathcal{A}$.
Demostrar que $e_1 = e_2$.

El concepto de álgebra asociativa con identidad

Adición

$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Mul. por escal.

$\cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Multiplicación

$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

El concepto de álgebra asociativa con identidad

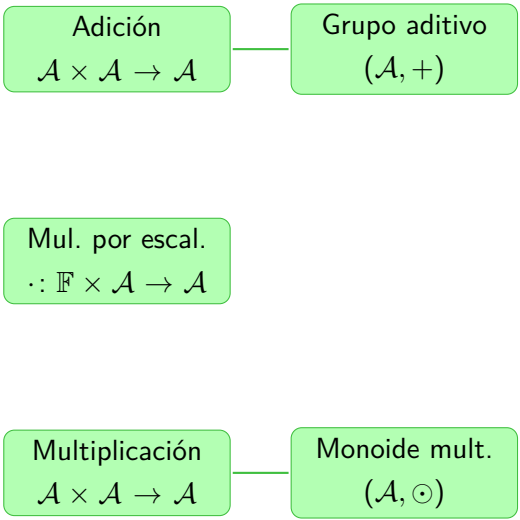
Adición
$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Grupo aditivo
$(\mathcal{A}, +)$

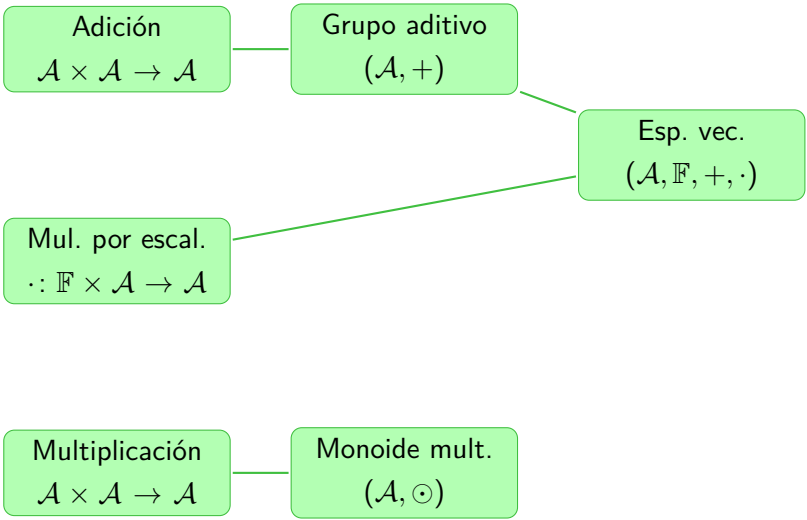
Mul. por escal.
$\cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Multiplicación
$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

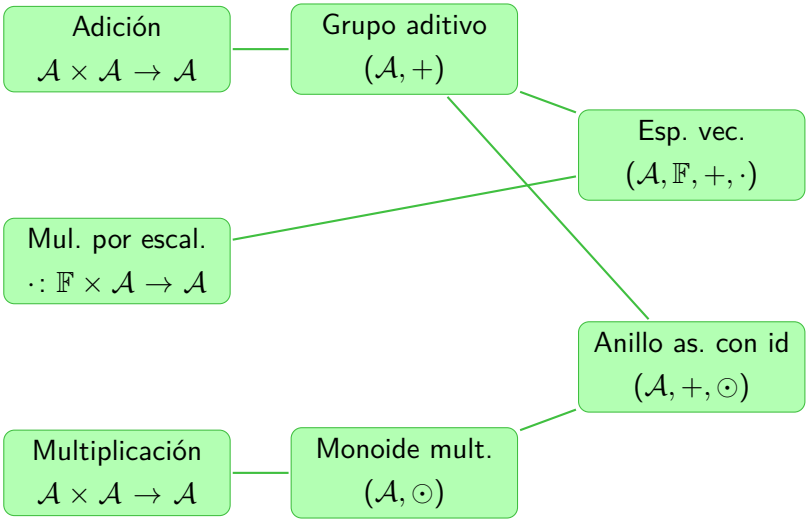
El concepto de álgebra asociativa con identidad



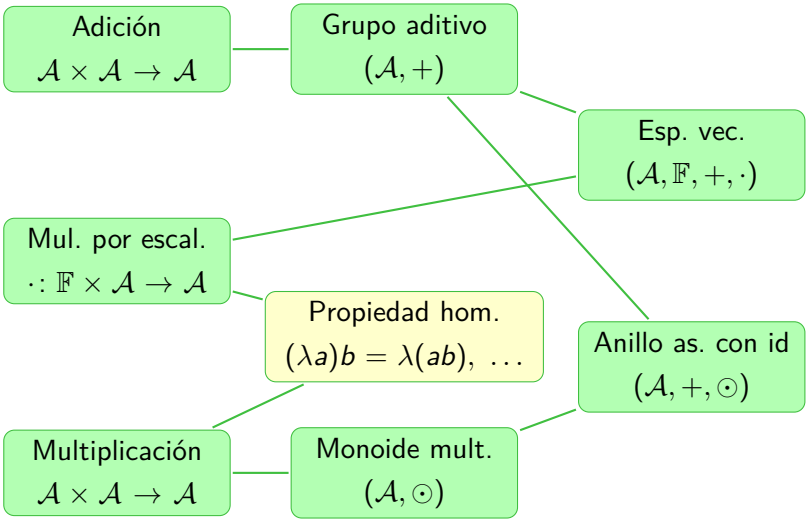
El concepto de álgebra asociativa con identidad



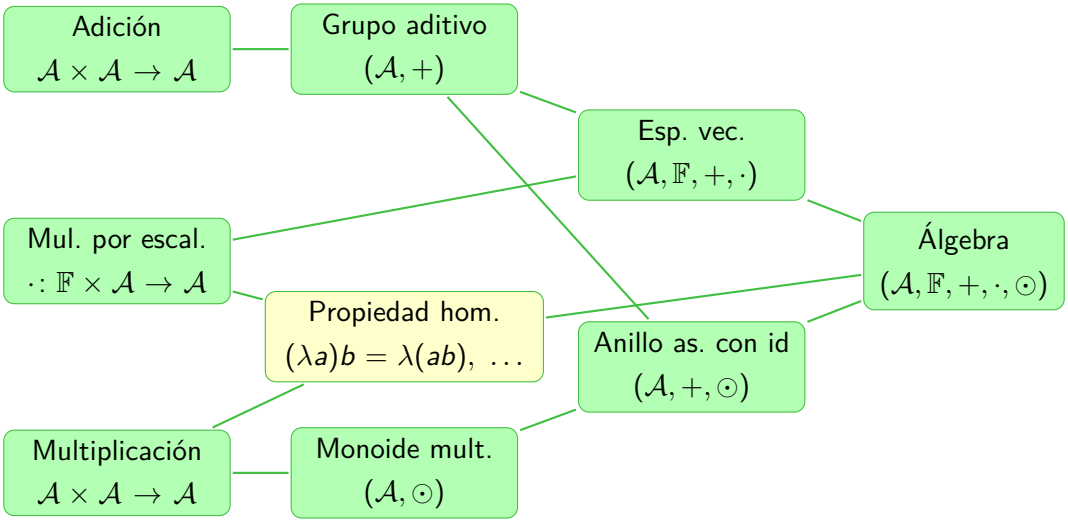
El concepto de álgebra asociativa con identidad



El concepto de álgebra asociativa con identidad



El concepto de álgebra asociativa con identidad



Los elementos invertibles en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

Los elementos invertibles en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene identidad. La denotemos por e.

Los elementos invertibles en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene identidad. La denotemos por e.

Denotemos por $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \coloneqq \Big\{ a \in \mathcal{A} \colon \quad \exists b \in \mathcal{A} \quad ab = ba = e \Big\}.$$

Los elementos invertibles en un álgebra (repaso)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$.

Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene identidad. La denotemos por e.

Denotemos por $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \coloneqq \Big\{ a \in \mathcal{A} \colon \quad \exists b \in \mathcal{A} \quad ab = ba = e \Big\}.$$

Ejercicio (la unicidad del elemento inverso, en caso de su existencia).
Sean $a, b, c \in \mathcal{A}$. Demostrar que si $ab = ba = e$ y $ac = ca = e$, entonces $b = c$.

Los operadores lineales acotados, el producto de operadores

Sea X un espacio de Banach.

Los operadores lineales acotados, el producto de operadores

Sea X un espacio de Banach.

Pongamos $\mathcal{B}(X) \coloneqq \mathcal{B}(X, X)$.

Los operadores lineales acotados, el producto de operadores

Sea X un espacio de Banach.

Pongamos $\mathcal{B}(X) \coloneqq \mathcal{B}(X, X)$.

Definimos en $\mathcal{B}(X)$ la operación de multiplicación como la composición:

$$ST \coloneqq S \circ T.$$

Los operadores lineales acotados, el producto de operadores

Sea X un espacio de Banach.

Pongamos $\mathcal{B}(X) \coloneqq \mathcal{B}(X, X)$.

Definimos en $\mathcal{B}(X)$ la operación de multiplicación como la composición:

$$ST \coloneqq S \circ T.$$

Entonces $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra compleja asociativa:

- es un espacio vectorial,
- $S(T + U) = ST + SU$, $(S + T)U = SU + TU$,
- $(\lambda S)T = S(\lambda T) = \lambda(ST)$,
- $(ST)U = S(TU)$.

$\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach

Si X, Y son espacios normados, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ se considera con la norma

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y.$$

Sabemos que $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio normado.

$\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach

Si X, Y son espacios normados, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ se considera con la norma

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y.$$

Sabemos que $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio normado.

Más aún, si Y es completo, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ es completo.

$\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach

Si X, Y son espacios normados, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ se considera con la norma

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y.$$

Sabemos que $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio normado.

Más aún, si Y es completo, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ es completo.

Conclusión: si X es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(X)$ es

$\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach

Si X, Y son espacios normados, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ se considera con la norma

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y.$$

Sabemos que $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio normado.

Más aún, si Y es completo, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ es completo.

Conclusión: si X es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach.

La norma en $\mathcal{B}(X)$ es submultiplicativa

Proposición

Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

La norma en $\mathcal{B}(X)$ es submultiplicativa

Proposición

Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

Demostración. En efecto, si $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$, entonces

$$\|(ST)(x)\|_X = \|S(T(x))\|_X \leq \|S\| \, \|Tx\|_X \leq \|S\| \, \|T\| \, \|x\|_X \leq \|S\| \, \|T\|.$$

El operador identidad

El operador de identidad $I\colon X \to X$ es un elemento neutro del álgebra $\mathcal{B}(X)$.

El operador identidad

El operador de identidad $I\colon X \to X$ es un elemento neutro del álgebra $\mathcal{B}(X)$.

En otras palabras, para cada S en $\mathcal{B}(X)$,

$$S\,I = I\,S = S.$$

El operador identidad

El operador de identidad $I\colon X \to X$ es un elemento neutro del álgebra $\mathcal{B}(X)$.

En otras palabras, para cada S en $\mathcal{B}(X)$,

$$S\,I = I\,S = S.$$

Además, $\|I\| = 1$.

Álgebra de Banach con identidad

Definición (álgebra de Banach con identidad)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja asociativa y al mismo tiempo un espacio de Banach.
Supongamos que la norma es submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|.$$

Además, supongamos que $\mathcal{A}$ tiene un elemento neutro e y $\|e\| = 1$.
Entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad.

Álgebra de Banach con identidad

Definición (álgebra de Banach con identidad)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja asociativa y al mismo tiempo un espacio de Banach.
Supongamos que la norma es submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|.$$

Además, supongamos que $\mathcal{A}$ tiene un elemento neutro e y $\|e\| = 1$.
Entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad.

Proposición

Sea X un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach.

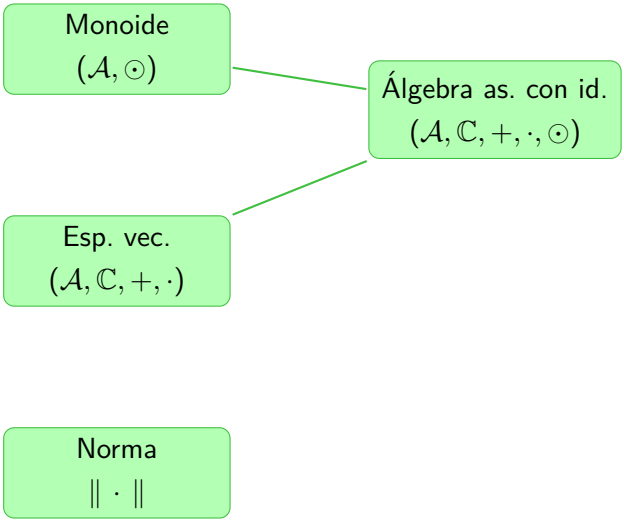
El concepto de álgebra de Banach con identidad

Monoide
$(\mathcal{A}, \odot)$

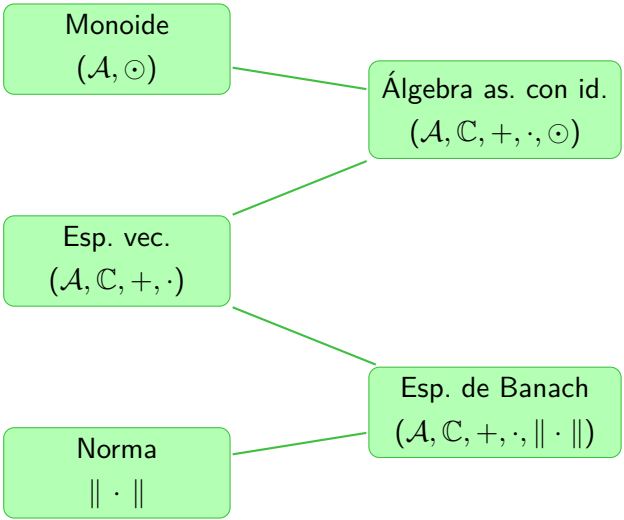
Esp. vec.
$(\mathcal{A}, \mathbb{C}, +, \cdot)$

Norma
$\| \cdot \|$

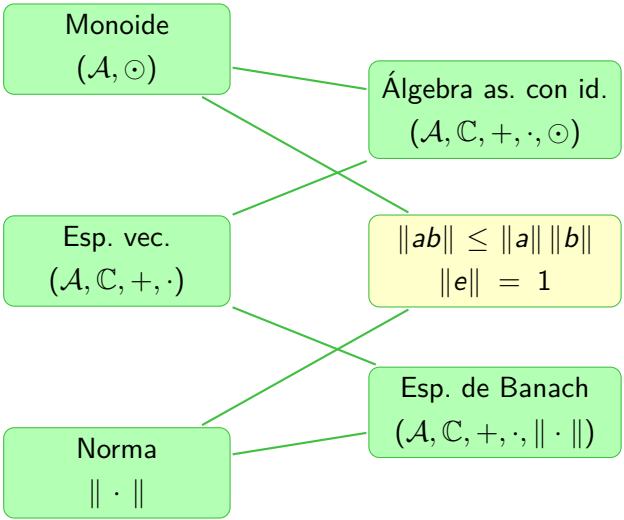
El concepto de álgebra de Banach con identidad



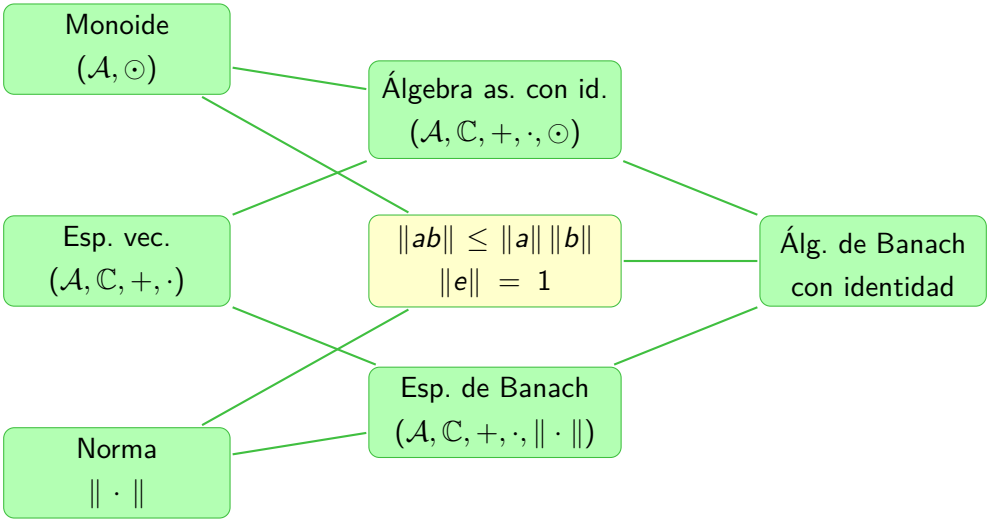
El concepto de álgebra de Banach con identidad



El concepto de álgebra de Banach con identidad



El concepto de álgebra de Banach con identidad



La multiplicación de operadores es continua

Proposición

La función $M\colon \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$, definida mediante la regla $M(S, T) \coloneqq ST$, es continua.

La multiplicación de operadores es continua

Proposición

La función $M\colon \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$, definida mediante la regla $M(S, T) \coloneqq ST$, es continua.

Idea de demostración.

Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, encontrar un $\delta > 0$ tal que
si $A, B \in \mathcal{B}(X)$, $\|A - S\| < \delta$ y $\|B - T\| < \delta$, entonces $\|AB - ST\| < \varepsilon$.

La multiplicación de operadores es continua

Proposición

La función $M\colon \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$, definida mediante la regla $M(S, T) \coloneqq ST$, es continua.

Idea de demostración.

Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, encontrar un $\delta > 0$ tal que
si $A, B \in \mathcal{B}(X)$, $\|A - S\| < \delta$ y $\|B - T\| < \delta$, entonces $\|AB - ST\| < \varepsilon$.

Un paso auxiliar: acotar $\|A\|$ en términos de $\|S\|$ y δ.

La multiplicación de operadores es continua

Proposición

La función $M\colon \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$, definida mediante la regla $M(S, T) \coloneqq ST$, es continua.

Idea de demostración.

Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, encontrar un $\delta > 0$ tal que
si $A, B \in \mathcal{B}(X)$, $\|A - S\| < \delta$ y $\|B - T\| < \delta$, entonces $\|AB - ST\| < \varepsilon$.

Un paso auxiliar: acotar $\|A\|$ en términos de $\|S\|$ y δ.

Un paso auxiliar: verificar la identidad

$$AB - ST = A(B - T) + (A - S)T.$$

La multiplicación de operadores es continua, en el lenguaje de sucesiones

Ejercicio.

Sean $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}, (B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X)^{\mathbb{N}}$ y $S, T \in \mathcal{B}(X)$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} A_k = S, \qquad \lim_{k\to\infty} B_k = T.$$

Demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} (A_k B_k) = ST.$$

La multiplicación de operadores es continua, en el lenguaje de sucesiones

Ejercicio.

Sean $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}, (B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X)^{\mathbb{N}}$ y $S, T \in \mathcal{B}(X)$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} A_k = S, \qquad \lim_{k\to\infty} B_k = T.$$

Demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} (A_k B_k) = ST.$$

Aunque este resultado se sigue de la proposición anterior,
se recomienda demostrarlo de manera independiente.

Operadores invertibles

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Operadores invertibles

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Ejercicio. Recordar la demostración de la unicidad del operador inverso.

Operadores invertibles

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Ejercicio. Recordar la demostración de la unicidad del operador inverso.

Denotamos por $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{B}(X)$:

$$\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \Big\{ S \in \mathcal{B}(X) : \quad \exists T \in \mathcal{B}(X) \quad ST = I \quad \wedge \quad TS = I \Big\}.$$

Operadores invertibles

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Ejercicio. Recordar la demostración de la unicidad del operador inverso.

Denotamos por $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{B}(X)$:

$$\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \Big\{ S \in \mathcal{B}(X) \colon \quad \exists T \in \mathcal{B}(X) \quad ST = I \quad \wedge \quad TS = I \Big\}.$$

Debido al teorema de Banach–Schauder sobre la transformación lineal abierta,
si $S \in \mathcal{B}(X)$ y S es biyectiva, entonces $S \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$.

Invertibilidad por la izquierda o por la derecha

Ejercicio. Mostrar que la invertibilidad por un lado no implica la invertibilidad por otro lado. Recordar un ejemplo, cuando $S, T \in \mathcal{B}(X)$, $ST = I$, pero $TS \neq I$.

Invertibilidad por la izquierda o por la derecha

Ejercicio. Mostrar que la invertibilidad por un lado no implica la invertibilidad por otro lado. Recordar un ejemplo, cuando $S, T \in \mathcal{B}(X)$, $ST = I$, pero $TS \neq I$.

Ejercicio. Para $X = \mathbb{C}^n$, $\mathcal{B}(X)$ se puede identificar con $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Recordar una demostración del siguiente teorema de álgebra lineal:

$$AB = I_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad BA = I_n.$$

Los operadores invertibles forman un grupo

Es fácil ver que si $S \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, entonces $S^{-1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$.

Los operadores invertibles forman un grupo

Es fácil ver que si $S \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, entonces $S^{-1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$.

Proposición

$\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ con la operación de composición es un grupo.

La operación de inversión

Definimos

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \mathrm{inv}(S) \coloneqq S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\mathrm{inv}(I) =$

La operación de inversión

Definimos

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \mathrm{inv}(S) \coloneqq S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\mathrm{inv}(I) = I$.

La operación de inversión

Definimos

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \mathrm{inv}(S) \coloneqq S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\mathrm{inv}(I) = I$.
2. Para cualesquiera S, T en $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\mathrm{inv}(ST) =$

La operación de inversión

Definimos

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \mathrm{inv}(S) \coloneqq S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\mathrm{inv}(I) = I$.
2. Para cualesquiera S, T en $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\mathrm{inv}(ST) = \mathrm{inv}(T)\,\mathrm{inv}(S)$.

La operación de inversión

Definimos

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \mathrm{inv}(S) \coloneqq S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\mathrm{inv}(I) = I$.
2. Para cualesquiera S, T en $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\mathrm{inv}(ST) = \mathrm{inv}(T)\,\mathrm{inv}(S)$.
3. Para cualquier S en $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\mathrm{inv}(\mathrm{inv}(S)) =$

La operación de inversión

Definimos

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \mathrm{inv}(S) \coloneqq S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\mathrm{inv}(I) = I$.
2. Para cualesquiera S, T en $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\mathrm{inv}(ST) = \mathrm{inv}(T)\,\mathrm{inv}(S)$.
3. Para cualquier S en $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\mathrm{inv}(\mathrm{inv}(S)) = S$.

El inverso de un múltiplo no nulo de un operador invertible

Ejercicio. Sea $T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Demostrar que $\lambda T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y

$$(\lambda T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\, T^{-1}.$$

Planes para futuro

Pronto demostraremos que el conjunto $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es abierto y la función inv es continua.