Propiedades del operador adjunto (en espacios de Hilbert)

Objetivos. Dado un espacio de Hilbert H, estudiar propiedades de la correspondencia $S \mapsto S^*$, donde $S \in \mathcal{B}(H)$.

Prerrequisitos. Definición del operador adjunto.

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, denotamos por f_S a la forma sesqulineal acotada mediante la regla

$$f_S(x, y) \coloneqq \langle Sx, y \rangle.$$

Definimos $\Omega \colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}(H)$, $\Omega(S) \coloneqq f_S$. Esta correspondencia entre $\mathcal{B}(H)$ y $\mathcal{S}(H)$ es un isomorfismo isométrico de espacios normados.

Ya sabemos que para cada S en $\mathcal{B}(H)$ existe un único T en $\mathcal{B}(H)$ tal que $f_S^* = f_T$, esto es,

$$\forall x, y \in H \qquad \langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Este operador T se llama el operador adjunto de S y se denota por T^*.

1 Proposición (la propiedad involutiva de la operación $*$)**.** *Sea* $S \in \mathcal{B}(H)$*. Entonces*

$$(S^*)^* = S.$$

Primera demostración. Para cada x, y en H, por la definición de S^* y $(S^*)^*$,

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, S^* y \rangle = \overline{\langle S^* y, x \rangle} = \overline{\langle y, (S^*)^* x \rangle} = \langle (S^*)^* x, y \rangle.$$

De aquí concluimos que $(S^*)^* = S$. $\square$

Segunda demostración. Para cada x, y en H,

$$\langle S^* x, y \rangle = \overline{\langle y, S^* x \rangle} = \overline{\langle Sy, x \rangle} = \langle x, Sy \rangle.$$

Esto significa que el operador S hace el papel que debe de hacer el operador $(S^*)^*$. Por la unicidad del operador adjunto, concluimos que $(S^*)^* = S$. $\square$

Las siguientes proposiciones se pueden demostrar con ayuda de las mismas ideas, por eso sus demostraciones se dejan como ejercicios.

2 Proposición (propiedad aditiva de la operación $*$)**.** *Sean* $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(H)$*. Entonces*

$$(S_1 + S_2)^* = S_1^* + S_2^*.$$

3 Proposición (propiedad conjugada homogénea de la operación $*$)**.** *Sean* $S \in \mathcal{B}(H)$*,* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Entonces*

$$(\lambda S)^* = \overline{\lambda} S^*.$$

4 Proposición (el operador adjunto del producto de dos operadores lineales acotados)**.** *Sean* $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(H)$*. Entonces*

$$(S_1 S_2)^* = S_2^* S_1^*.$$

5 Proposición (sobre la norma del producto S^*S)**.** *Sea* $S \in \mathcal{B}(H)$*. Entonces*

$$\|S^*S\| = \|SS^*\| = \|S\|^2.$$

Demostración. Por un lado, $\|S^*S\| \le \|S^*\| \, \|S\| = \|S\|^2$. Por otro lado, para cada x en H,

$$\|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx \rangle = \langle S^*Sx, x \rangle = |\langle S^*Sx, x \rangle| \le \|S^*S\| \, \|x\|^2.$$

De aquí se sigue que $\|S\| \le \sqrt{\|S^*S\|}$. Hemos demostrado que $\|S^*S\| = \|S\|^2$. Sustituyendo S^* en lugar de S obtenemos la igualdad $\|SS^*\| = \|S\|^2$. $\square$

6 Proposición (el complemento ortogonal de la imagen y el núcleo del operador adjunto)**.** *Sea* $S \in \mathcal{B}(H)$*. Entonces*

$$\operatorname{im}(S)^\perp = \ker(S^*).$$

Demostración. Sea $y \in H$. Entonces

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{im}(S)^\perp \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall z \in \operatorname{im}(S) \quad y \perp z \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in H \quad \langle y, Sx \rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in H \quad \langle S^*y, x \rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad S^*y = 0_H \\ &\Longleftrightarrow \quad y \in \ker(S^*). \end{aligned}$$

$\square$

7 Corolario. *Sea* $S \in \mathcal{B}(H)$*. Entonces*

$$\operatorname{cl}(\operatorname{im}(S)) = \ker(S^*)^\perp.$$