El operador adjunto del operador lineal acotado (un tema de la unidad “Operadores en espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

6 de julio de 2022

Objetivos

Suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo,
$\mathcal{B}(H) :=$ el espacio de los operadores lineales acotados.

- Dado S in $\mathcal{B}(H)$, demostrar que existe un único T en $\mathcal{B}(H)$ tal que

$$\forall x, y \in H \qquad \langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

  Denotamos este T por S^*.

- Demostrar las propiedades algebraicas de la operación $S \mapsto S^*$.

Aplicaciones

- Propiedades de los operadores normales.
- Propiedades del núcleo y de la imagen.
- Propiedades de los operadores autoadjuntos.
- Teoría de las álgebras C*.

Prerrequisitos

- El espacio normado $\mathcal{B}(H)$ de los operadores lineales acotados.
- El espacio normado $\mathcal{S}(H)$ de las formas sesquilineales acotadas.
- El isomorfismo isométrico entre $\mathcal{B}(H)$ y $\mathcal{S}(H)$.

Plan

1. Repaso
2. La existencia y unicidad del operador adjunto
3. Propiedades de la operación “adjuntar”

Repaso: la forma sesquilineal acotada asociada al operador lineal acotado

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo.

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, definimos $f_S\colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$f_S(x, y) \coloneqq \langle Sx, y \rangle.$$

Sabemos que $f_S \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f_S\| = \|S\|$.

Repaso: el isomorfismo entre $\mathcal{B}(H)$ y $\mathcal{S}(H)$

Definimos $\Omega\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}(H)$ mediante la regla $\Omega(A) := f_A$, esto es,

$$\Omega(A)(u, v) := \langle Au, v\rangle.$$

Sabemos que Ω es un isomorfismo isométrico de espacios normados.

La forma sesquilineal adjunta

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, definimos $g^*\colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$g^*(x, y) := \overline{g(y, x)}.$$

La forma sesquilineal adjunta

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, definimos $g^*\colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$g^*(x, y) := \overline{g(y, x)}.$$

Ejercicio. Demostrar que $g^* \in \mathcal{S}(H)$ y $\|g^*\| = \|g\|$.

Repaso: la igualdad de productos internos

Ejercicio. Demostrar que $H^{\perp} = \{0_H\}$.

Repaso: la igualdad de productos internos

Ejercicio. Demostrar que $H^\perp = \{0_H\}$.

Ejercicio. Sean $u, v \in H$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $u = v$;

(b) $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$ para cada w en H;

(c) $\langle w, u \rangle = \langle w, v \rangle$ para cada w en H.

Plan

La existencia y unicidad del operador adjunto

Teorema

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces existe un único $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que para cada x, y en H

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Más aún, $\|T\| = \|S\|$.

La existencia y unicidad del operador adjunto

Teorema

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces existe un único $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que para cada x, y en H

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Más aún, $\|T\| = \|S\|$.

En la situación del teorema, el operador T se denota por S^*
y se llama el operador adjunto de S.

Demostración de la unicidad

Supongamos que $T, U \in \mathcal{B}(H)$ y para cada x, y en H

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \qquad \langle Sx, y\rangle = \langle x, Uy\rangle.$$

Demostración de la unicidad

Supongamos que $T, U \in \mathcal{B}(H)$ y para cada x, y en H

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \qquad \langle Sx, y\rangle = \langle x, Uy\rangle.$$

Luego

$$\langle x, Ty\rangle = \langle x, Uy\rangle.$$

Demostración de la unicidad

Supongamos que $T, U \in \mathcal{B}(H)$ y para cada x, y en H

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \qquad \langle Sx, y \rangle = \langle x, Uy \rangle.$$

Luego

$$\langle x, Ty \rangle = \langle x, Uy \rangle.$$

Entonces para cada y en H obtenemos que $Ty = Uy$.

Demostración de la existencia

Recordamos la notación. $\Omega\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}(H), \quad \Omega(A)(x,y) \coloneqq \langle Ax, y\rangle.$

Demostración de la existencia

Recordamos la notación. $\quad \Omega\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}(H), \quad \Omega(A)(x,y) \coloneqq \langle Ax, y\rangle.$

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, $\quad g^*(x,y) \coloneqq \overline{g(y,x)}.$

Demostración de la existencia

Recordamos la notación. $\Omega\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}(H)$, $\Omega(A)(x,y) \coloneqq \langle Ax, y\rangle$.

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, $g^*(x,y) \coloneqq \overline{g(y,x)}$.

Definimos $T\colon H \to H$,

$$T \coloneqq \Omega^{-1}(\Omega(S)^*).$$

Demostración de la existencia

Recordamos la notación. $\Omega\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}(H), \quad \Omega(A)(x,y) \coloneqq \langle Ax, y\rangle.$

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, $\quad g^*(x,y) \coloneqq \overline{g(y,x)}.$

Definimos $T\colon H \to H$,

$$T \coloneqq \Omega^{-1}(\Omega(S)^*).$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(H)$ y $\|T\| = \|S\|$.

Demostración de la existencia

Recordamos la notación. $\Omega\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}(H), \quad \Omega(A)(x,y) \coloneqq \langle Ax, y\rangle.$

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, $\quad g^*(x,y) \coloneqq \overline{g(y,x)}.$

Definimos $T\colon H \to H$,

$$T \coloneqq \Omega^{-1}(\Omega(S)^*).$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(H)$ y $\|T\| = \|S\|$.

Además,

$$\langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \overline{\Omega(S)^*(y,x)} = \Omega(S)(x,y) = \langle Sx, y\rangle.$$

Demostración de la existencia, otra redacción

Denotamos por f_S^* la forma sesqulineal adjunta de f_S:

$$f_S^*(y,x) \coloneqq \overline{f_S(x,y)} = \overline{\langle Sx, y\rangle} = \langle y, Sx\rangle.$$

Demostración de la existencia, otra redacción

Denotamos por f_S^* la forma sesqulineal adjunta de f_S:

$$f_S^*(y, x) := \overline{f_S(x, y)} = \overline{\langle Sx, y \rangle} = \langle y, Sx \rangle.$$

Sabemos que existe un único operador lineal acotado $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que $f_T = f_S^*$, esto es,

$$\langle Ty, x \rangle = f_T(y, x) = f_S^*(y, x) = \langle y, Sx \rangle.$$

esto es, $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$.

Demostración de la existencia, otra redacción

Denotamos por f_S^* la forma sesqulineal adjunta de f_S:

$$f_S^*(y,x) := \overline{f_S(x,y)} = \overline{\langle Sx, y\rangle} = \langle y, Sx\rangle.$$

Sabemos que existe un único operador lineal acotado $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que $f_T = f_S^*$, esto es,

$$\langle Ty, x\rangle = f_T(y,x) = f_S^*(y,x) = \langle y, Sx\rangle.$$

esto es, $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.

Además, sabemos que $\|T\| = \|f_T\|$ y $\|f_S^*\| = \|f_S\|$, así que

$$\|T\| = \|f_T\| = \|f_S^*\| = \|f_S\| = \|S\|.$$

Demostración de la existencia, diagrama

$$\boxed{S \in \mathcal{B}(H)}$$

Demostración de la existencia, diagrama

$$\begin{tikzcd} S \in \mathcal{B}(H) \arrow[r, "\Omega"] & \begin{array}{c} f_S := \Omega(S) \in \mathcal{S}(H) \\ f_S(x,y) = \langle Sx, y\rangle \end{array} \end{tikzcd}$$

Demostración de la existencia, diagrama

$$
\begin{tikzcd}
S \in \mathcal{B}(H) \arrow[r, "\Omega"] & \begin{array}{c} f_S := \Omega(S) \in \mathcal{S}(H) \\ f_S(x,y) = \langle Sx, y\rangle \end{array} \arrow[d] \\
 & \begin{array}{c} f_S^* \in \mathcal{S}(H) \\ f_S^*(y,x) = \langle y, Sx\rangle \end{array}
\end{tikzcd}
$$

Demostración de la existencia, diagrama

$$\begin{tikzcd}
S \in \mathcal{B}(H) \arrow[r, "\Omega"] & \begin{array}{c} f_S := \Omega(S) \in \mathcal{S}(H) \\ f_S(x,y) = \langle Sx, y \rangle \end{array} \arrow[d] \\
\begin{array}{c} T \in \mathcal{B}(H) \\ f_S^*(y,x) = \langle Ty, x \rangle \end{array} & \begin{array}{c} f_S^* \in \mathcal{S}(H) \\ f_S^*(y,x) = \langle y, Sx \rangle \end{array} \arrow[l, "\Omega^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Demostración de la existencia, diagrama

$$
\begin{tikzcd}
S \in \mathcal{B}(H) \arrow[rr, "\Omega"] & & \begin{array}{c} f_S := \Omega(S) \in \mathcal{S}(H) \\ f_S(x,y) = \langle Sx, y\rangle \end{array} \arrow[d] \\
\begin{array}{c} T \in \mathcal{B}(H) \\ f_S^*(y,x) = \langle Ty, x\rangle \end{array} \arrow[dr] & & \begin{array}{c} f_S^* \in \mathcal{S}(H) \\ f_S^*(y,x) = \langle y, Sx\rangle \end{array} \arrow[ll, "\Omega^{-1}"'] \arrow[dl] \\
& \begin{array}{c} \langle y, Sx\rangle = \langle Ty, x\rangle \\ \langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \end{array} &
\end{tikzcd}
$$

Escribir una demostración más detallada

Ejercicio.

Demostrar el teorema sin usar la correspondencia $S \mapsto f_S$.

Basarse solamente en el teorema de Riesz–Fréchet (sobre la representación de los funcionales lineales acotados).

Notación S^* y las reglas para trabajar con S^*

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, denotamos por S^* al operador T del teorema.

Notación S^* y las reglas para trabajar con S^*

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, denotamos por S^* al operador T del teorema.

Desgraciadamente, no tenemos ninguna regla simple para calcular S^*.

Solamente usamos las siguientes dos reglas.

Notación S^* y las reglas para trabajar con S^*

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, denotamos por S^* al operador T del teorema.

Desgraciadamente, no tenemos ninguna regla simple para calcular S^*.
Solamente usamos las siguientes dos reglas.

Por la definición de S^*, para cada x, y en H

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^* y\rangle.$$

Notación S^* y las reglas para trabajar con S^*

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, denotamos por S^* al operador T del teorema.

Desgraciadamente, no tenemos ninguna regla simple para calcular S^*.
Solamente usamos las siguientes dos reglas.

Por la definición de S^*, para cada x, y en H

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, S^* y \rangle.$$

La unicidad del operador adjunto implica que si $T \in \mathcal{B}(H)$ y

$$\forall x, y \in H \qquad \langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle,$$

entonces $T = S^*$.

Ejemplo: el operador adjunto al operador de multiplicación por una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Denotamos por A^* la matriz transpuesta conjugada de A:

$$A^* = \left[\,\overline{A_{k,j}}\,\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Ejemplo: el operador adjunto al operador de multiplicación por una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Denotamos por A^* la matriz transpuesta conjugada de A:

$$A^* = \left[\,\overline{A_{k,j}}\,\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Denotamos por T_A al operador lineal asociado a la matriz A:

$$T_A x := Ax.$$

Ejemplo: el operador adjunto al operador de multiplicación por una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Denotamos por A^* la matriz transpuesta conjugada de A:

$$A^* = \left[\,\overline{A_{k,j}}\,\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Denotamos por T_A al operador lineal asociado a la matriz A:

$$T_A x := Ax.$$

Entonces para cada x, y en $\mathbb{C}^n$,

$$\langle T_A x, y \rangle = y^* A x = (A^* y)^* x = \langle x, A^* y \rangle = \langle x, T_{A^*} y \rangle.$$

Por lo tanto, $T_A^* = T_{A^*}$.

Ejemplos

Ejercicio. Demostrar que $R^* = L$, donde R y L son los operadores de desplazamiento.

Ejemplos

Ejercicio. Demostrar que $R^* = L$, donde R y L son los operadores de desplazamiento.

Ejercicio. Hallar M_a^*, donde M_a es el operador de multiplicación.

Ejemplos

Ejercicio. Demostrar que $R^* = L$, donde R y L son los operadores de desplazamiento.

Ejercicio. Hallar M_a^*, donde M_a es el operador de multiplicación.

Ejercicio. Hallar el adjunto al operador integral,

$$(S_K f)(x) := \int_X K(x,y) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Plan

La propiedad involutiva de la operación $*$

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces
$$(S^*)^* = S.$$

Primera demostración

Para cada x, y en H, por la definición de S^* y $(S^*)^*$,

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle = \overline{\langle S^*y, x\rangle} = \overline{\langle y, (S^*)^*x\rangle} = \langle (S^*)^*x, y\rangle.$$

Por lo tanto, $(S^*)^* = S$.

Segunda demostración

Para cada x, y en H,

$$\langle S^* x, y \rangle = \overline{\langle y, S^* x \rangle} = \overline{\langle Sy, x \rangle} = \langle x, Sy \rangle.$$

Esto significa que el operador S hace el papel que debe de hacer el operador $(S^*)^*$.

Segunda demostración

Para cada x, y en H,

$$\langle S^*x, y\rangle = \overline{\langle y, S^*x\rangle} = \overline{\langle Sy, x\rangle} = \langle x, Sy\rangle.$$

Esto significa que el operador S hace el papel que debe de hacer el operador $(S^*)^*$.

Por la unicidad del operador adjunto, concluimos que $(S^*)^* = S$.

La propiedad aditiva de la operación $*$

Proposición

Sean $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(H)$. Entonces
$$(S_1 + S_2)^* = S_1^* + S_2^*.$$

La propiedad conjugada homogénea de la operación $*$

Proposición

Sean $S \in \mathcal{B}(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$(\lambda S)^* = \overline{\lambda} S^*.$$

El operador adjunto del producto de dos operadores lineales acotados

Proposición

Sean $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(H)$. Entonces
$$(S_1 S_2)^* = S_2^* S_1^*.$$

El complemento ortogonal de la imagen y el núcleo del operador adjunto

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces

$$\operatorname{im}(S)^{\perp} = \ker(S^*).$$

Demostración

Sea $y \in H$. Entonces

$$
\begin{aligned}
y \in \operatorname{im}(S)^{\perp} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall z \in \operatorname{im}(S) \quad y \perp z \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in H \quad \langle y, Sx \rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in H \quad \langle S^{*}y, x \rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad S^{*}y = 0_H \\
&\Longleftrightarrow \quad y \in \ker(S^{*}).
\end{aligned}
$$

La cerradura de la imagen en términos del operador adjunto

Corolario

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces
$$\operatorname{clos}(\operatorname{im}(S)) = \ker(S^*)^\perp.$$

S^* para $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$

Generalizar el teorema a la situación, cuando $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,
donde H_1 y H_2 son espacios de Hilbert.

S^* para $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$

Generalizar el teorema a la situación, cuando $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, donde H_1 y H_2 son espacios de Hilbert.

En este caso $S^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$.