

El operador adjunto del operador lineal acotado
(un tema de la unidad “Operadores en espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko

<https://esfm.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

6 de julio de 2022

Objetivos

Suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo,
 $\mathcal{B}(H) :=$ el espacio de los operadores lineales acotados.

- Dado S in $\mathcal{B}(H)$, demostrar que existe un único T en $\mathcal{B}(H)$ tal que

$$\forall x, y \in H \quad \langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Denotamos este T por S^* .

- Demostrar las propiedades algebraicas de la operación $S \mapsto S^*$.

Aplicaciones

- Propiedades de los operadores normales.
- Propiedades del núcleo y de la imagen.
- Propiedades de los operadores autoadjuntos.
- Teoría de las álgebras C^* .

Prerrequisitos

- El espacio normado $\mathcal{B}(H)$ de los operadores lineales acotados.
- El espacio normado $\mathcal{S}(H)$ de las formas sesquilineales acotadas.
- El isomorfismo isométrico entre $\mathcal{B}(H)$ y $\mathcal{S}(H)$.

- 1 Repaso
- 2 La existencia y unicidad del operador adjunto
- 3 Propiedades de la operación “adjuntar”

Plan

- 1 Repaso
- 2 La existencia y unicidad del operador adjunto
- 3 Propiedades de la operación “adjuntar”

Repaso: la forma sesquilineal acotada asociada al operador lineal acotado

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo.

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, definimos $f_S: H^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f_S(x, y) := \langle Sx, y \rangle.$$

Sabemos que $f_S \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f_S\| = \|S\|$.

Repaso: el isomorfismo entre $\mathcal{B}(H)$ y $\mathcal{S}(H)$

Definimos $\Omega: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{S}(H)$ mediante la regla $\Omega(A) := f_A$, esto es,

$$\Omega(A)(u, v) := \langle Au, v \rangle.$$

Sabemos que Ω es un isomorfismo isométrico de espacios normados.

La forma sesquilineal adjunta

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, definimos $g^*: H^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g^*(x, y) := \overline{g(y, x)}.$$

La forma sesquilineal adjunta

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, definimos $g^*: H^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g^*(x, y) := \overline{g(y, x)}.$$

Ejercicio. Demostrar que $g^* \in \mathcal{S}(H)$ y $\|g^*\| = \|g\|$.

Repaso: la igualdad de productos internos

Ejercicio. Demostrar que $H^\perp = \{0_H\}$.

Repaso: la igualdad de productos internos

Ejercicio. Demostrar que $H^\perp = \{0_H\}$.

Ejercicio. Sean $u, v \in H$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $u = v$;
- (b) $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$ para cada w en H ;
- (c) $\langle w, u \rangle = \langle w, v \rangle$ para cada w en H .

Plan

- 1 Repaso
- 2 La existencia y unicidad del operador adjunto
- 3 Propiedades de la operación “adjuntar”

La existencia y unicidad del operador adjunto

Teorema

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces existe un único $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que para cada x, y en H

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Más aún, $\|T\| = \|S\|$.

La existencia y unicidad del operador adjunto

Teorema

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces existe un único $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que para cada x, y en H

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Más aún, $\|T\| = \|S\|$.

En la situación del teorema, el operador T se denota por S^* y se llama el **operador adjunto de S** .

Demostración de la unicidad

Supongamos que $T, U \in \mathcal{B}(H)$ y para cada x, y en H

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \langle Sx, y \rangle = \langle x, Uy \rangle.$$

Demostración de la unicidad

Supongamos que $T, U \in \mathcal{B}(H)$ y para cada x, y en H

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \langle Sx, y \rangle = \langle x, Uy \rangle.$$

Luego

$$\langle x, Ty \rangle = \langle x, Uy \rangle.$$

Demostración de la unicidad

Supongamos que $T, U \in \mathcal{B}(H)$ y para cada x, y en H

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \langle Sx, y \rangle = \langle x, Uy \rangle.$$

Luego

$$\langle x, Ty \rangle = \langle x, Uy \rangle.$$

Entonces para cada y en H obtenemos que $Ty = Uy$.

Demostración de la existencia

Recordamos la notación. $\Omega: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{S}(H)$, $\Omega(A)(x, y) := \langle Ax, y \rangle$.

Demostración de la existencia

Recordamos la notación. $\Omega: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{S}(H)$, $\Omega(A)(x, y) := \langle Ax, y \rangle$.

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, $g^*(x, y) := \overline{g(y, x)}$.

Demostración de la existencia

Recordamos la notación. $\Omega: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{S}(H)$, $\Omega(A)(x, y) := \langle Ax, y \rangle$.

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, $g^*(x, y) := \overline{g(y, x)}$.

Definimos $T: H \rightarrow H$,

$$T := \Omega^{-1}(\Omega(S)^*).$$

Demostración de la existencia

Recordamos la notación. $\Omega: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{S}(H)$, $\Omega(A)(x, y) := \langle Ax, y \rangle$.

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, $g^*(x, y) := \overline{g(y, x)}$.

Definimos $T: H \rightarrow H$,

$$T := \Omega^{-1}(\Omega(S)^*).$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(H)$ y $\|T\| = \|S\|$.

Demostración de la existencia

Recordamos la notación. $\Omega: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{S}(H)$, $\Omega(A)(x, y) := \langle Ax, y \rangle$.

Dada g en $\mathcal{S}(H)$, $g^*(x, y) := \overline{g(y, x)}$.

Definimos $T: H \rightarrow H$,

$$T := \Omega^{-1}(\Omega(S)^*).$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(H)$ y $\|T\| = \|S\|$.

Además,

$$\langle x, Ty \rangle = \overline{\langle Ty, x \rangle} = \overline{\Omega(S)^*(y, x)} = \Omega(S)(x, y) = \langle Sx, y \rangle.$$

Demostración de la existencia, otra redacción

Denotamos por f_S^* la forma sesquilineal adjunta de f_S :

$$f_S^*(y, x) := \overline{f_S(x, y)} = \overline{\langle Sx, y \rangle} = \langle y, Sx \rangle.$$

Demostración de la existencia, otra redacción

Denotamos por f_S^* la forma sesquilineal adjunta de f_S :

$$f_S^*(y, x) := \overline{f_S(x, y)} = \overline{\langle Sx, y \rangle} = \langle y, Sx \rangle.$$

Sabemos que existe un único operador lineal acotado $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que $f_T = f_S^*$, esto es,

$$\langle Ty, x \rangle = f_T(y, x) = f_S^*(y, x) = \langle y, Sx \rangle.$$

esto es, $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$.

Demostración de la existencia, otra redacción

Denotamos por f_S^* la forma sesquilineal adjunta de f_S :

$$f_S^*(y, x) := \overline{f_S(x, y)} = \overline{\langle Sx, y \rangle} = \langle y, Sx \rangle.$$

Sabemos que existe un único operador lineal acotado $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que $f_T = f_S^*$, esto es,

$$\langle Ty, x \rangle = f_T(y, x) = f_S^*(y, x) = \langle y, Sx \rangle.$$

esto es, $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$.

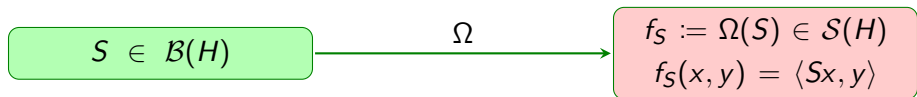
Además, sabemos que $\|T\| = \|f_T\|$ y $\|f_S^*\| = \|f_S\|$, así que

$$\|T\| = \|f_T\| = \|f_S^*\| = \|f_S\| = \|S\|.$$

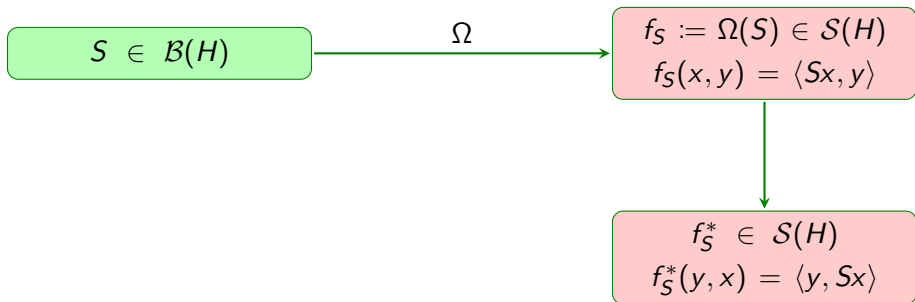
Demostración de la existencia, diagrama

$$S \in \mathcal{B}(H)$$

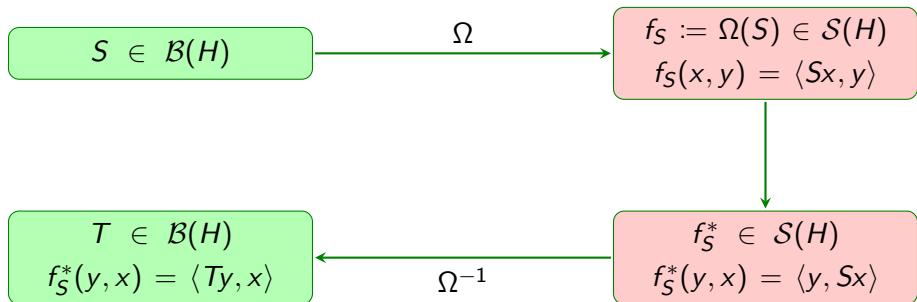
Demostración de la existencia, diagrama



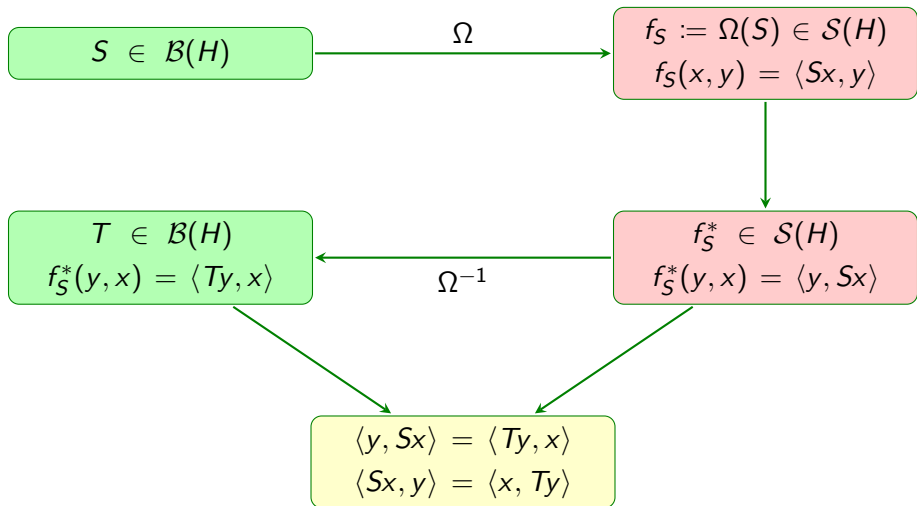
Demostración de la existencia, diagrama



Demostración de la existencia, diagrama



Demostración de la existencia, diagrama



Escribir una demostración más detallada

Ejercicio.

Demostrar el teorema sin usar la correspondencia $S \mapsto f_S$.

Basarse solamente en el teorema de Riesz–Fréchet (sobre la representación de los funcionales lineales acotados).

Notación S^* y las reglas para trabajar con S^*

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, denotamos por S^* al operador T del teorema.

Notación S^* y las reglas para trabajar con S^*

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, denotamos por S^* al operador T del teorema.

Desgraciadamente, no tenemos ninguna regla simple para calcular S^* .

Solamente usamos las siguientes dos reglas.

Notación S^* y las reglas para trabajar con S^*

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, denotamos por S^* al operador T del teorema.

Desgraciadamente, no tenemos ninguna regla simple para calcular S^* .

Solamente usamos las siguientes dos reglas.

Por la definición de S^* , para cada x, y en H

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, S^*y \rangle.$$

Notación S^* y las reglas para trabajar con S^*

Dado S en $\mathcal{B}(H)$, denotamos por S^* al operador T del teorema.

Desgraciadamente, no tenemos ninguna regla simple para calcular S^* .

Solamente usamos las siguientes dos reglas.

Por la definición de S^* , para cada x, y en H

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, S^*y \rangle.$$

La unicidad del operador adjunto implica que si $T \in \mathcal{B}(H)$ y

$$\forall x, y \in H \quad \langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle,$$

entonces $T = S^*$.

Ejemplo: el operador adjunto al operador de multiplicación por una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Denotamos por A^* la matriz transpuesta conjugada de A :

$$A^* = [\overline{A_{k,j}}]_{j,k=1}^n.$$

Ejemplo: el operador adjunto al operador de multiplicación por una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Denotamos por A^* la matriz transpuesta conjugada de A :

$$A^* = [\overline{A_{k,j}}]_{j,k=1}^n.$$

Denotamos por T_A al operador lineal asociado a la matriz A :

$$T_A x := Ax.$$

Ejemplo: el operador adjunto al operador de multiplicación por una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Denotamos por A^* la matriz transpuesta conjugada de A :

$$A^* = [\overline{A_{k,j}}]_{j,k=1}^n.$$

Denotamos por T_A al operador lineal asociado a la matriz A :

$$T_A x := Ax.$$

Entonces para cada x, y en \mathbb{C}^n ,

$$\langle T_A x, y \rangle = y^* Ax = (A^* y)^* x = \langle x, A^* y \rangle = \langle x, T_{A^*} y \rangle.$$

Por lo tanto, $T_A^* = T_{A^*}$.

Ejemplos

Ejercicio. Demostrar que $R^* = L$, donde R y L son los operadores de desplazamiento.

Ejemplos

Ejercicio. Demostrar que $R^* = L$, donde R y L son los operadores de desplazamiento.

Ejercicio. Hallar M_a^* , donde M_a es el operador de multiplicación.

Ejemplos

Ejercicio. Demostrar que $R^* = L$, donde R y L son los operadores de desplazamiento.

Ejercicio. Hallar M_a^* , donde M_a es el operador de multiplicación.

Ejercicio. Hallar el adjunto al operador integral,

$$(S_K f)(x) := \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y).$$

Plan

- 1 Repaso
- 2 La existencia y unicidad del operador adjunto
- 3 Propiedades de la operación “adjuntar”

La propiedad involutiva de la operación *

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces

$$(S^*)^* = S.$$

Primera demostración

Para cada x, y en H , por la definición de S^* y $(S^*)^*$,

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, S^*y \rangle = \overline{\langle S^*y, x \rangle} = \overline{\langle y, (S^*)^*x \rangle} = \langle (S^*)^*x, y \rangle.$$

Por lo tanto, $(S^*)^* = S$.

Segunda demostración

Para cada x, y en H ,

$$\langle S^*x, y \rangle = \overline{\langle y, S^*x \rangle} = \overline{\langle Sy, x \rangle} = \langle x, Sy \rangle.$$

Esto significa que el operador S hace el papel que debe de hacer el operador $(S^*)^*$.

Segunda demostración

Para cada x, y en H ,

$$\langle S^*x, y \rangle = \overline{\langle y, S^*x \rangle} = \overline{\langle Sy, x \rangle} = \langle x, Sy \rangle.$$

Esto significa que el operador S hace el papel que debe de hacer el operador $(S^*)^*$.

Por la unicidad del operador adjunto, concluimos que $(S^*)^* = S$.

La propiedad aditiva de la operación *

Proposición

Sean $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(H)$. Entonces

$$(S_1 + S_2)^* = S_1^* + S_2^*.$$

La propiedad conjugada homogénea de la operación *

Proposición

Sean $S \in \mathcal{B}(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$(\lambda S)^* = \bar{\lambda} S^*.$$

El operador adjunto del producto de dos operadores lineales acotados

Proposición

Sean $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(H)$. Entonces

$$(S_1 S_2)^* = S_2^* S_1^*.$$

El complemento ortogonal de la imagen y el núcleo del operador adjunto

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces

$$\text{im}(S)^\perp = \ker(S^*).$$

Demostración

Sea $y \in H$. Entonces

$$\begin{aligned}y \in \operatorname{im}(S)^\perp &\iff \forall z \in \operatorname{im}(S) \quad y \perp z \\ &\iff \forall x \in H \quad \langle y, Sx \rangle = 0 \\ &\iff \forall x \in H \quad \langle S^*y, x \rangle = 0 \\ &\iff S^*y = 0_H \\ &\iff y \in \ker(S^*).\end{aligned}$$

La cerradura de la imagen en términos del operador adjunto

Corolario

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces

$$\text{clos}(\text{im}(S)) = \ker(S^*)^\perp.$$

S^* para $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$

Generalizar el teorema a la situación, cuando $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, donde H_1 y H_2 son espacios de Hilbert.

S^* para $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$

Generalizar el teorema a la situación, cuando $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, donde H_1 y H_2 son espacios de Hilbert.

En este caso $S^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$.