El operador adjunto
(en espacios de Hilbert)

Objetivos. Definir el operador adjunto de un operador lineal acotado que actúa en un espacio de Hilbert.

Prerrequisitos. La correspondencia entre los operadores lineales acotados y las formas sesquilineales acotadas.

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo. Ya sabemos cada operador S de clase $\mathcal{B}(H)$ induce una forma sesqulineal acotada mediante la regla

$$f_S(x,y) \coloneqq \langle Sx, y\rangle.$$

Esta correspondencia entre $\mathcal{B}(H)$ y $\mathcal{S}(H)$ es un isomorfismo isométrico de espacios normados.

1 Ejercicio. Recordar una demostración de la igualdad $H^\perp = \{0_H\}$.

2 Lema. *Sean $u, v \in H$. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes entre si.*

(a) $u = v$;

(b) $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$ *para cada* w *en* H;

(c) $\langle w, u\rangle = \langle w, v\rangle$ *para cada* w *en* H.

Demostración. Ejercicio. □

3 Teorema (sobre la existencia y unicidad del operador adjunto)**.** *Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces existe un único $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que para cada x, y en H*

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle. \tag{1}$$

Más aún, $\|T\| = \|S\|$.

Demostración de la unicidad. Supongamos que $T, U \in \mathcal{B}(H)$ y para cada x, y en H

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \qquad \langle Sx, y\rangle = \langle x, Uy\rangle.$$

Entonces, por el Lema 2, para cada y en H obtenemos que $Ty = Uy$. $\square$

Primera demostración de la existencia. Sea $\Omega\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}(H)$ la correspondencia natural entre los operadores lineales acotadas y las formas sesquilineales acotadas:

$$\Omega(A)(x, y) \coloneqq \langle Ax, y\rangle.$$

Sabemos que la función Ω es un isomorfismo isométrico de espacios normados. Para cada g en $\mathcal{S}(H)$, definimos g^* mediante la regla

$$g^*(x, y) \coloneqq \overline{g(y, x)}.$$

Sabemos que $g^* \in \mathcal{S}(H)$ y $\|g^*\| = \|g\|$. Definimos A^* mediante la siguiente regla:

$$A^* = \Omega^{-1}(\Omega(A)^*).$$

Entonces $A^* \in \mathcal{B}(H)$ y $\|A^*\| = \|A\|$. Además,

$$\langle x, A^*y\rangle = \overline{\langle A^*y, x\rangle} = \overline{\Omega(A)^*(y, x)} = \Omega(A)(x, y) = \langle Ax, y\rangle. \qquad \square$$

Segunda demostración de la existencia. Denotamos por f_S^* la forma sesqulineal adjunta de f_S:

$$f_S^*(y, x) \coloneqq \overline{f_S(x, y)} = \overline{\langle Sx, y\rangle} = \langle y, Sx\rangle.$$

Sabemos que existe un único operador lineal acotado $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que $f_T = f_S^*$, esto es,

$$\langle Ty, x\rangle = f_T(y, x) = f_S^*(y, x) = \langle y, Sx\rangle.$$

esto es, $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$. Además, sabemos que $\|T\| = \|f_T\|$ y $\|f_S^*\| = \|f_S\|$, así que

$$\|T\| = \|f_T\| = \|f_S^*\| = \|f_S\| = \|S\|. \qquad \square$$

4 Ejercicio. Escribir una demostración más larga del Teorema 3, sin usar la información sobre las formas sesquilineales acotadas y basándose solamente en el teorema de Riesz–Fréchet sobre la representación de los funcionales lineales acotados.

5 Proposición (la propiedad involutiva de la operación $*$)**.** *Sea* $S \in \mathcal{B}(H)$*. Entonces*

$$(S^*)^* = S.$$

Primera demostración. Para cada x, y en H, por la definición de S^* y $(S^*)^*$,

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle = \overline{\langle S^*y, x\rangle} = \overline{\langle y, (S^*)^*x\rangle} = \langle (S^*)^*x, y\rangle.$$

Por el Lema 2, $(S^*)^* = S$. □

Segunda demostración. Para cada x, y en H,

$$\langle S^*x, y\rangle = \overline{\langle y, S^*x\rangle} = \overline{\langle Sy, x\rangle} = \langle x, Sy\rangle.$$

Esto significa que el operador S hace el papel que debe de hacer el operador $(S^*)^*$. Por la unicidad del operador adjunto, concluimos que $(S^*)^* = S$. □

Las siguientes proposiciones se pueden demostrar con ayuda de las mismas ideas, por eso sus demostraciones se dejan como ejercicios.

6 Proposición (propiedad aditiva de la operación $*$)**.** *Sean $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(H)$. Entonces*

$$(S_1 + S_2)^* = S_1^* + S_2^*.$$

7 Proposición (propiedad conjugada homogénea de la operación $*$)**.** *Sean $S \in \mathcal{B}(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces*

$$(\lambda S)^* = \overline{\lambda} S^*.$$

8 Proposición (el operador adjunto del producto de dos operadores lineales acotados)**.** *Sean $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(H)$. Entonces*

$$(S_1 S_2)^* = S_2^* S_1^*.$$

9 Proposición (sobre la norma del producto S^*S)**.** *Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces*

$$\|S^*S\| = \|SS^*\| = \|S\|^2.$$

Demostración. Por un lado, $\|S^*S\| \le \|S^*\|\,\|S\| = \|S\|^2$. Por otro lado, para cada x en H,

$$\|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle = |\langle S^*Sx, x\rangle| \le \|S^*S\|\,\|x\|^2.$$

De aquí se sigue que $\|S\| \le \sqrt{\|S^*S\|}$. Hemos demostrado que $\|S^*S\| = \|S\|^2$. Sustituyendo S^* en lugar de S obtenemos la igualdad $\|SS^*\| = \|S\|^2$. □

10 Proposición (el complemento ortogonal de la imagen y el núcleo del operador adjunto)**.** *Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces*

$$\operatorname{im}(S)^\perp = \ker(S^*).$$

Demostración. Sea $y \in H$. Entonces

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{im}(S)^\perp \quad &\iff \quad \forall z \in \operatorname{im}(S) \quad y \perp z \\ &\iff \quad \forall x \in H \quad \langle y, Sx \rangle = 0 \\ &\iff \quad \forall x \in H \quad \langle S^* y, x \rangle = 0 \\ &\iff \quad S^* y = 0_H \\ &\iff \quad y \in \ker(S^*). \end{aligned}$$

□

11 Corolario. *Sea* $S \in \mathcal{B}(H)$. *Entonces*

$$\operatorname{cl}(\operatorname{im}(S)) = \ker(S^*)^\perp.$$

12 Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y sea T_A el operador lineal en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ asociado a la matriz A:

$$T_A x := Ax.$$

Demostrar que $T_A^* = T_{A^*}$, donde A^* la matriz adjunta de A, es decir, la matriz transpuesta conjugada de A.

13 Ejercicio. Denotamos por R y L los operadores de desplazamiento en el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$. Demostrar que $R^* = L$.

14 Ejercicio. Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Denotamos por M_a el operador de multiplicación por a que actúa en $\ell^2(\mathbb{N})$ mediante la regla

$$(M_a x) := x\,a = \big(a_k x_k\big)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Demostrar que $M_a^* = M_{\overline{a}}$.

15 Ejercicio. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $a \in L^\infty(X, \mu)$. Denotamos por M_a el operador de multiplicación por a:

$$M_a f = a\,f.$$

Encontrar M_a^*.

16 Ejercicio. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $K \in \mathcal{M}(X \times X, \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \mu \times \mu)$ tal que el operador integral

$$(S_K f)(x) := \int_X K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

está bien definido y acotado. Encontrar S^*.

17 Ejercicio. Generalizar el Teorema 3 a la situación, cuando $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, donde H_1 y H_2 son espacios de Hilbert.