Funciones absolutamente continuas

Objetivos. Introducir el concepto de funciones absolutamente continuas. Demostrar que las funciones absolutamente continuas son continuas y de variación acotada, y que las integrales con límites variables definen funciones absolutamente continuas.

Requisitos. Continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración, propiedades de la variación total, funciones de variación acotada.

Aplicaciones. Luego mostraremos que las funciones continuas son integrales indefinidas de funciones integrables, y que para las funciones absolutamente continuas se cumple el segundo teorema fundamental de cálculo (la regla de Barrow–Newton–Leibniz).

1 Definición (función absolutamente continua)**.** Una función $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ se llama *absolutamente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda familia finita $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ de subintervalos disjuntos de $[a,b]$ tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$, se cumple la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{n} |F(d_j) - F(c_j)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Denotemos por $\mathrm{AC}([a,b])$ al conjunto de todas funciones complejas absolutamente continuas en $[a,b]$.

2 Ejercicio (todas las funciones Lipschitz continuas son absolutamente continuas)**.** Demostrar que $\mathrm{Lip}([a,b]) \subseteq \mathrm{AC}([a,b])$.

3 Ejercicio. $\mathrm{AC}([a,b])$ es un espacio vectorial.

4 Proposición. $\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq C([a,b])$.

Demostración. Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. Mostraremos que F es uniformemente continua en $[a,b]$. Para un $\varepsilon > 0$ encontramos un $\delta > 0$ como en la Definición 1. Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $0 < x_2 - x_1 < \delta$. Consideramos la familia que consiste de un solo intervalo (x_1, x_2). Aplicamos la desigualdad (1) con esta familia y obtenemos $|F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon$. □

Eel resultado del Ejercicio 2 implica que cada función continuamente derivable en $[a,b]$ es absolutamente continua, y la Proposición 4 implica que si una función tiene discontinuidades en $[a,b]$, entonces no es absolutamente continua. Estas observaciones proveen muchos ejemplos de funciones que son absolutamente continuas y muchos ejemplos de funciones que no lo son.

5 Proposición (integrales indefinidas de funciones Lebesgue integrables son funciones absolutamente continuas)**.** *Sea* $f \in L^1([a,b], \mathbb{C})$*. Definimos* $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *mediante la regla*

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

Entonces $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Demostración. Esta afirmación se sigue de la continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < +\infty$, se tiene que $\int_A |f| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$. Si $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$, entonces pongamos $A \coloneqq \bigcup_{j=1}^n (c_j, d_j)$ y obtenemos

$$\sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int\limits_{(c_j,d_j)} f' \,\mathrm{d}\mu \right| \le \sum_{j=1}^n \int\limits_{(c_j,d_j)} |f'| \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_A |f'| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon. \qquad \square$$

6 Teorema (cada función absolutamente continua tiene variación acotada)**.**

$$\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq \mathrm{BV}([a,b]).$$

Demostración. Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. Para $\varepsilon = 1$ encontremos $\delta > 0$ como en la Definición 1. Pongamos

$$K = 1 + \left\lfloor \frac{b-a}{\delta} \right\rfloor .$$

Sea τ una partición de $[a,b]$. Denotemos por τ' a la partición que se obtiene de τ al agregar (cuando no pertenecen a τ) los puntos

$$a + j\frac{b-a}{K} \qquad (j = 1, \ldots, K-1).$$

Numeramos los elementos de τ' con subíndices dobles de tal manera que

$$y_{j,0} = a + \frac{(j-1)(b-a)}{K} < y_{j,1} < \ldots < y_{j,m_j} = a + \frac{j(b-a)}{K} = y_{j+1,0}.$$

Entonces en cada grupo la suma de las longitudes de los intervalos es $\frac{b-a}{K} < \delta$, y por la elección de δ obtenemos

$$\sum_{s=1}^{m_j} |f(y_{j,s}) - f(y_{j,s-1})| \le 1.$$

Luego

$$S_{\mathrm{abs}}(F,\tau) \le S_{\mathrm{abs}}(F,\tau') \le K.$$

Pasando al supremos sobre τ obtenemos que $\mathrm{Var}_a^b(F) \le K$. $\square$

7 Corollary. *Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. Entonces F es derivable c.t.p., y la función F' es integrable.*

8 Ejercicio. Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. Demostrar que F es acotada en $[a,b]$.

9 Ejercicio. Sean $F, G \in \mathrm{AC}([a,b])$. Demostrar que $FG \in \mathrm{AC}([a,b])$.

10 Ejercicio. Mostrar que el conjunto $\mathrm{AC}([a,b])$ es un álgebra compleja con identidad (el papel de la identidad hace la constante 1).