Integrales impropias: convergencia absoluta

1. Definición (integral impropia).
Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$.

i) Supongamos que f es integrable en todo intervalo (a,β), donde $a < \beta < b$.

Si existe $\displaystyle\lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta\in(a,b)}} \int_a^\beta f$, este límite se designa por $\displaystyle\int_a^{\to b} f$.

ii) Supongamos f integrable en todo intervalo (α,b), donde $a < \alpha < b$.

Si existe $\displaystyle\lim_{\substack{\alpha\to a\\ \alpha\in(a,b)}} \int_\alpha^b f$, este límite se designa por $\displaystyle\int_{\to a}^{b} f$.

iii) Supongamos f integrable en todo subintervalo compacto de $]a,b[$. Sea $x_0 \in (a,b)$. La existencia de $\displaystyle\int_{\to a}^{x_0} f$ es independiente de la elección del punto x_0, y la existencia de $\displaystyle\int_{x_0}^{\to b} f$ también. Si existen $\displaystyle\int_{\to a}^{x_0} f$ y $\displaystyle\int_{x_0}^{\to b} f$, la suma $\displaystyle\int_{\to a}^{x_0} f + \int_{x_0}^{\to b} f$ es también independiente de la elección de x_0 y se designa por $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f$.

$\displaystyle\int_{\to a}^{b} f$, $\displaystyle\int_{a}^{\to b} f$, $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f$ se llaman *integrales impropias*.

En vez de decir que una integral impropia “existe”, se suele decir que dicha integral impropia es *convergente*.

2. Criterio de Cauchy para la convergencia de integrales impropias.
Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ una función integrable en todo intervalo (a,β) donde $a < \beta < b$.

La integral impropia $\displaystyle\int_a^{\to b} f$ es convergente $\iff$ $\displaystyle\lim_{\substack{x_1,x_2\to b\\ x_1,x_2\in(a,b)}} \int_{x_1}^{x_2} f = 0.$

3. Proposición. Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ una función integrable en todo intervalo (a,β), donde $a < \beta < b$. Si la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\to b} |f|$ converge, entonces la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\to b} f$ converge también.

4. Definición (convergencia absoluta). Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ una función integrable en todo intervalo (a,β), donde $a < \beta < b$. Si la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\to b} |f|$ es convergente, se dice que la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\to b} f$ es *absolutamente convergente.*

5. Convergencia absoluta e integral de Lebesgue. Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ una función integrable en todo intervalo (a,β), donde $a < \beta < b$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) la integral impropia $\int_a^{\to b} |f|$ converge;

(b) la función f es integrable en (a,b).

Si cumplen (a) y (b), entonces $\displaystyle\int_a^{\to b} f = \int_a^{b} f$.

6. Ejemplos.

- $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad p > 1.$$
- $$\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad p < 1.$$
- $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^q} < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad q > 1.$$

7. Ejemplos. Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\, dx$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$ para todo $a > 0$.

8. Ejemplos. Sean $a > 0$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Calcular las integrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, \mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, \mathrm{d}x.$$

Primer modo. Usando la integración por partes, obtener un sistema de ecuaciones lineales y resolver este sistema.

Segundo modo. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-a+b\,\mathrm{i})x}\, \mathrm{d}x$.

Criterios de comparación para integrales impropias de funciones no negativas

9. Proposición. Si $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo $x \in (a, b)$ y la integral $\int_a^{\to b} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, entonces la integral $\int_a^{\to b} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge también.

10. Corolario. Si $f(x) \ge g(x) \ge 0$ para todo $x \in (a, b)$ y la integral $\int_a^{\to b} g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, entonces la integral $\int_a^{\to b} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge también.

11. Proposición. Sean f y g funciones no negativas e integrables en (a, β) para todo $\beta \in (a, b)$. Supongamos que $f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to b$, i.e.

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Entonces las integrales $\int_a^{\to b} f$ y $\int_a^{\to b} g$ ambas convergen o ambas divergen.

12. Ejemplos. Investigar la convergencia:

$$\int\limits_0^{\to 4} \frac{\mathrm{d}x}{(4-x)^{2/3}}, \qquad \int\limits_3^{\to +\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{e^x}, \qquad \int\limits_{\to 0}^{\to 2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x - x^2}}.$$