Desigualdad de Young
(un tema de la unidad “Funciones convexas”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

8 de octubre de 2022

Objetivos:

- demostrar la desigualdad de Young usando la convexidad de la función exponencial;
- demostrar la desigualdad de Young estricta.

Prerrequisitos:

- criterio de función convexa en términos de su segunda derivada;
- la segunda derivada y funciones estríctamente convexas.

Aplicaciones:

- la desigualdad de Hölder;
- el criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder.

La función exponencial definida en $\mathbb{R}$

Denotamos por $\exp_{\mathbb{R}}$ a la función exponencial definida en $\mathbb{R}$:

$$\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

La función exponencial definida en $\mathbb{R}$

Denotamos por $\exp_{\mathbb{R}}$ a la función exponencial definida en $\mathbb{R}$:

$$\exp_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Es fácil ver que

$$\exp_{\mathbb{R}}' = \exp_{\mathbb{R}}, \qquad \exp_{\mathbb{R}}'' = \exp_{\mathbb{R}},$$

y que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exp_{\mathbb{R}}(x) > 0.$$

Repaso: funciones convexas

Por simplicidad, consideramos solamente el caso cuando el dominio de f es $\mathbb{R}$.

Repaso: funciones convexas

Por simplicidad, consideramos solamente el caso cuando el dominio de f es $\mathbb{R}$.

Definición

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama convexa, si

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \forall \alpha \in [0,1] \qquad f\Big((1-\alpha)x + \alpha y\Big) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y).$$

Repaso: funciones convexas

Por simplicidad, consideramos solamente el caso cuando el dominio de f es $\mathbb{R}$.

Definición

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama convexa, si

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \forall \alpha \in [0,1] \qquad f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y).$$

Proposición

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- f es convexa;
- $f''(x) \ge 0$ para cada x en $\mathbb{R}$.

Repaso: funciones estrictamente convexas

Definición

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama estrictamente convexa, si

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha \in (0,1) \quad \Big(x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) < (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \Big).$$

Repaso: funciones estrictamente convexas

Definición

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama estrictamente convexa, si

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha \in (0,1) \quad \Bigg(x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f\Big((1-\alpha)x + \alpha y\Big) < (1-\alpha) f(x) + \alpha f(y) \Bigg).$$

Proposición

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Supongamos que $f''(x) > 0$ para cada x en $\mathbb{R}$.

Entonces f es estrictamente convexa.

Convexidad estricta de la función exponencial

Proposición

La función $\exp_{\mathbb{R}}$ es estrictamente convexa,

esto es, para cada x, y en $\mathbb{R}$ con $x \neq y$ y cada α en $(0, 1)$,

$$\exp_{\mathbb{R}}\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) < (1-\alpha)\exp_{\mathbb{R}}(x) + \alpha \exp_{\mathbb{R}}(y).$$

Demostración: la propiedad $\exp_{\mathbb{R}}'' > 0$ y la proposición anterior.

Exponentes conjugados

Proposición

Sean $p, q > 1$. Entonces

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (p-1)q = p \qquad \Longleftrightarrow \qquad (q-1)p = q.$$

Exponentes conjugados

Proposición

Sean $p, q > 1$. Entonces

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (p-1)q = p \qquad \Longleftrightarrow \qquad (q-1)p = q.$$

Demostración: ejercicio simple.

Exponentes conjugados

Proposición

Sean $p, q > 1$. Entonces

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (p-1)q = p \qquad \Longleftrightarrow \qquad (q-1)p = q.$$

Demostración: ejercicio simple.

Los pares p, q con estas propiedades se llaman exponentes conjugados o exponentes complementarios.

Desigualdad de Young

Proposición

Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Entonces

$$\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.}$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso trivial

Supongamos que $a = 0$ o $b = 0$. Entonces

$$ab = 0$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso trivial

Supongamos que $a = 0$ o $b = 0$. Entonces

$$ab = 0$$

y

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq 0.$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p \ln(a), \qquad y := q \ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p \ln(a), \qquad y := q \ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p \ln(a), \qquad y := q \ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha =$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \dfrac{1}{p},$

$$(1-\alpha)x + \alpha y$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \dfrac{1}{p}$,

$$(1-\alpha)x + \alpha y =$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \dfrac{1}{p},$

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \ln(a) + \ln(b)$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \dfrac{1}{p},$

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \ln(a) + \ln(b) =$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \dfrac{1}{p},$

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \frac{1}{p}$,

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Como $\exp_{\mathbb{R}}$ es convexa,

$$ab$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \frac{1}{p},$

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Como $\exp_{\mathbb{R}}$ es convexa,

$$ab =$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p \ln(a), \qquad y := q \ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \dfrac{1}{p},$

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Como $\exp_{\mathbb{R}}$ es convexa,

$$ab = \exp\Big((1-\alpha)x + \alpha y\Big)$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \frac{1}{p},$

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Como $\exp_{\mathbb{R}}$ es convexa,

$$ab = \exp\Big((1-\alpha)x + \alpha y\Big) \leq$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p \ln(a), \qquad y := q \ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \dfrac{1}{p},$

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Como $\exp_{\mathbb{R}}$ es convexa,

$$ab = \exp\Big((1-\alpha)x + \alpha y\Big) \leq (1-\alpha)\exp(x) + \alpha\exp(y)$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \frac{1}{p},$

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Como $\exp_{\mathbb{R}}$ es convexa,

$$ab = \exp\Big((1-\alpha)x + \alpha y\Big) \le (1-\alpha)\exp(x) + \alpha\exp(y) =$$

Demostración de la desigualdad de Young, el caso principal

Supongamos que $a > 0$, $b > 0$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \frac{1}{p}$,

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Como $\exp_{\mathbb{R}}$ es convexa,

$$ab = \exp\Big((1-\alpha)x + \alpha y\Big) \le (1-\alpha)\exp(x) + \alpha\exp(y) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

La desigualdad de Young estricta

Proposición

Sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Sean $a, b \geq 0$ tales que

$$a^p \neq b^q.$$

Entonces

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración de la desigualdad de Young estricta, casos triviales

Estamos suponiendo que

$$a^p \neq b^q.$$

Demostración de la desigualdad de Young estricta, casos triviales

Estamos suponiendo que

$$a^p \neq b^q.$$

Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$.

Demostración de la desigualdad de Young estricta, casos triviales

Estamos suponiendo que

$$a^p \neq b^q.$$

Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$.

Si $b = 0$, entonces $a \neq 0$.

Demostración de la desigualdad de Young estricta, casos triviales

Estamos suponiendo que

$$a^p \neq b^q.$$

Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$.

Si $b = 0$, entonces $a \neq 0$.

En cada uno de estos casos,

$$ab = 0 < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración de la desigualdad de Young estricta, el caso principal

Sean $a > 0$, $b > 0$ tales que $a^p \neq b^q$.

Demostración de la desigualdad de Young estricta, el caso principal

Sean $a > 0$, $b > 0$ tales que $a^p \neq b^q$. Pongamos

$$x := p \ln(a), \qquad y := q \ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Demostración de la desigualdad de Young estricta, el caso principal

Sean $a > 0$, $b > 0$ tales que $a^p \neq b^q$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \frac{1}{p}$,

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \frac{1}{p}\,px + \frac{1}{q}\,qy = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Demostración de la desigualdad de Young estricta, el caso principal

Sean $a > 0$, $b > 0$ tales que $a^p \neq b^q$. Pongamos

$$x := p\ln(a), \qquad y := q\ln(b), \qquad \alpha := \frac{1}{q}.$$

Entonces $\quad 1 - \alpha = \frac{1}{p}$,

$$(1-\alpha)x + \alpha y = \frac{1}{p}\,px + \frac{1}{q}\,qy = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Aplicamos la convexidad estricta de $\exp_{\mathbb{R}}$:

$$ab = \exp_{\mathbb{R}}\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) < (1-\alpha)\exp_{\mathbb{R}}(x) + \alpha\exp_{\mathbb{R}}(y) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Criterio de igualdad en la desigualdad de Young

Proposición

Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Entonces

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^p = b^q.$$

Criterio de igualdad en la desigualdad de Young

Proposición

Sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Entonces

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \iff \qquad a^p = b^q.$$

Hemos mostrado $\Longrightarrow$ de manera contrapositiva.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Young

Proposición

Sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Entonces

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^p = b^q.$$

Hemos mostrado $\Longrightarrow$ de manera contrapositiva.

Ejercicio: demostrar $\Longleftarrow$.

Problema adicional

Encontrar otras demostraciones de la desigualdad de Young y del criterio de igualdad en la desigualdad de Young.