Desigualdad de Young

Objetivos. Demostrar la desigualdad de Young usando la convexidad de la función exponencial.

Requisitos. Funciones convexas, criterio de función convexa en términos de su segunda derivada, la segunda derivada y funciones estríctamente convexas.

Aplicaciones. Desigualdad de Hölder.

1. Convexidad de la función exponencial. En este tema denotamos por exp a la función exponencial restringida al eje real:

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

La segunda derivada de esta función es positiva en cada punto:

$$\exp''(x) = \exp(x) > 0,$$

luego la función exp es convexa. Esto significa que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y todos $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$ se cumple la desigualdad

$$\exp(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \exp(x) + \beta \exp(y). \tag{1}$$

2. Exponentes conjugados. Dos números $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se llaman *exponentes conjugados*. Tal vez otro nombre adecuado sería *exponentes complementarios*. Es fácil ver que la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se puede escribir también en la siguiente forma equivalente:

$$(p-1)q = p. \tag{2}$$

3. Desigualdad de Young. Sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{3}$$

Demostración. Si $a = 0$ o $b = 0$, entonces el lado izquierdo de la desigualdad (3) es 0, mientras al lado derecho es no negativo, y la desigualdad se cumple. Sean $a > 0$ y $b > 0$. Entonces (3) se obtiene de (1) al hacer el siguiente cambio de variables:

$$\alpha = \frac{1}{p}, \qquad \beta = \frac{1}{q}, \qquad x = p\ln(a), \qquad y = q\ln(b). \qquad \square$$

4. Tarea adicional. Encuentre otras demostraciones de la desigualdad de Young.