Desigualdades de Young, Hölder y Minkowski

Objetivos. Demostrar las desigualdades de Young, Hölder y Minkowski.

Requisitos. Funciones convexas, criterio de función convexa en términos de su segunda derivada, la integral de Lebesgue, propiedad monótona de la integral de Lebesgue.

Desigualdad de Young

1. Convexidad de la función exponencial. En este tema denotamos por exp a la función exponencial restringida al eje real:

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

La segunda derivada de esta función es positiva en cada punto:

$$\exp''(x) = \exp(x) > 0,$$

luego la función exp es convexa. Esto significa que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y todos $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$ se cumple la desigualdad

$$\exp(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \exp(x) + \beta \exp(y). \tag{1}$$

2. Exponentes conjugados. Dos números $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se llaman *exponentes conjugados*. Tal vez otro nombre adecuado sería *exponentes complementarios*. Es fácil ver que la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se puede escribir también en la siguiente forma equivalente:

$$(p-1)q = p. \tag{2}$$

3. Desigualdad de Young. Sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{3}$$

Demostración. Si $a = 0$ o $b = 0$, entonces el lado izquierdo de la desigualdad (3) es 0, mientras al lado derecho es no negativo, y la desigualdad se cumple. Sean $a > 0$ y $b > 0$. Entonces (3) se obtiene de (1) al hacer el siguiente cambio de variables:

$$\alpha = \frac{1}{p}, \qquad \beta = \frac{1}{q}, \qquad x = p\ln(a), \qquad y = q\ln(b). \qquad \square$$

4. Tarea adicional. Encuentre otras demostraciones de la desigualdad de Young.

Desigualdad de Hölder

5. Teorema (desigualdad de Hölder para funciones positivas). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\int\limits_X f\, g\, d\mu \le \left(\int\limits_X f^p\, d\mu \right)^{1/p} \left(\int\limits_X g^q\, d\mu \right)^{1/q}. \tag{4}$$

Demostración. Denotemos por α y β a los factores que están en el lado derecho de (5):

$$\alpha := \left(\int\limits_X f^p\, d\mu \right)^{1/p}, \qquad \beta := \left(\int\limits_X g^q\, d\mu \right)^{1/q}.$$

Si $\alpha = 0$, entonces $f = 0$ casi en todas partes, y la desigualdad (5) se convierte en la igualdad trivial $0 = 0$. De manera similar se considera el caso cuando $\beta = 0$. Si $\alpha > 0, \beta > 0$ y $\alpha = +\infty$ o $\beta = +\infty$, entonces el lado derecho de (5) es $+\infty$, y (5) se cumple de manera trivial.

Consideremos el caso principal cuando α y β son números finitos y estrictamente positivos: $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Denotemos por u y v a las funciones que se obtienen de f y g después de normalizarlas de la siguiente manera:

$$u := \frac{f}{\alpha}, \qquad v := \frac{g}{\beta}.$$

Entonces

$$\int\limits_X u^p\, d\mu = \frac{1}{\alpha^p} \int\limits_X f^p\, d\mu = 1, \qquad \int\limits_X v^q\, d\mu = \frac{1}{\beta^q} \int\limits_X g^q\, d\mu = 1.$$

Para todo $x \in X$ aplicamos la desigualdad de Young (3) a los números $u(x)$ y $v(x)$:

$$u(x)v(x) \le \frac{u(x)^p}{p} + \frac{v(x)^q}{q},$$

luego integramos ambos lados sobre X respecto a la medida μ:

$$\int\limits_X uv\, d\mu \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Hemos demostrado que $\frac{1}{\alpha\beta} \int_X uv\, d\mu \le 1$, esto es, $\int_X fg\, d\mu \le \alpha\beta$. □

6. Teorema (desigualdad de Hölder para funciones reales o complejas). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\int\limits_X |f|\, |g|\, d\mu \le \left(\int\limits_X |f|^p\, d\mu \right)^{1/p} \left(\int\limits_X |g|^q\, d\mu \right)^{1/q}. \tag{5}$$

Demostración. Aplicamos el Teorema 5 a las funciones $|f|$ y $|g|$ en vez de f y g, respectivamente. □

7. Observación (la desigualdad de Hölder para los casos $p = 1$ y $p = \infty$). Luego vamos a definir el supremo esencial de una función medible no negativa (definida en un espacio de medida) y mostrar que la desigualdad de Hölder tiene sentido para $p = 1$ y $q = +\infty$, o bien para $p = +\infty$ y $q = 1$.

8. Tarea adicional. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $p, q > 0$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Determine qué condición sobre las funciones f y g es necesaria y suficiente para que la desigualdad de Hölder se convierta en una igualdad.

El siguiente teorema se llama a veces "el teorema inverso de Hölder".

9. Teorema. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $0 < \alpha < +\infty$, donde $\alpha \coloneqq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$. Entonces existe una función $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que

$$\int_X |g|^q \, d\mu = 1 \qquad \text{y} \qquad \int_X f g \, d\mu = \alpha. \tag{6}$$

Idea de demostración. Para todo punto $x \in X$ definimos $g(x)$ de la siguiente manera:

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} \alpha^{-p/q} \, |f(x)|^{p-2} \, \overline{f(x)}, & \text{si } f(x) \neq 0; \\ 0, & \text{si } f(x) = 0. \end{cases}$$

Se puede verificar que $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Con ayuda de (2) se prueba fácilmente que se cumplen las propiedades (6). □

10. Observación. Los Teoremas 6 y 9 juntos implican que

$$\left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \sup \left\{ \left| \int_X f g \, d\mu \right| : \quad g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}), \quad \int_X |g|^q \, d\mu = 1 \right\}. \tag{7}$$

Después de definir los espacios $L^p(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, veremos que (7) describe la norma $\| \cdot \|_p$ en términos de la norma $\| \cdot \|_q$. Además la identidad (7) (o los Teoremas 6 y 9 juntos) hace un papel importante en la descripción del espacio dual del espacio $L^p(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Desigualdad de Minkowski

11. Teorema. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $p \in [1, +\infty)$. Entonces

$$\left(\int_X |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \le \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p}. \tag{8}$$

Demostración. En el caso $p = 1$ la demostración es muy simple:

$$\int_X |f+g| \, d\mu \le \int_X (|f| + |g|) \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \, d\mu.$$

Sea $p > 1$. Si al menos uno de los sumandos en el lado derecho de (8) es infinito, entonces la desigualdad se cumple. Supongamos que ambos sumandos son finitos. Definimos un conjunto auxiliar:

$$Y = \{x \in X\colon \ |f(x)| \ge |g(x)|\}.$$

Entonces para todo $x \in Y$ acotamos $|f(x) + g(x)|$ por $2|f(x)|$:

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le 2|f(x)|,$$

y para todo $x \in X \setminus Y$ acotamos $|f(x) + g(x)|$ por $2|g(x)|$. Usando estas cotas mostramos que la función $|f + g|^p$ es integrable:

$$\begin{aligned} \int_X |f+g|^p \, d\mu &= \int_Y |f+g|^p \, d\mu + \int_{X \setminus Y} |f+g|^p \, d\mu \\ &\le 2^p \int_Y |f|^p \, d\mu + 2^p \int_{X \setminus Y} |g|^p \, d\mu \le 2^p \int_X |f|^p \, d\mu + 2^p \int_X |g|^p \, d\mu < +\infty. \end{aligned}$$

Si $\int_X |f+g|^p \, d\mu = 0$, entonces la desigualdad es obvia. Suponemos que $\int_X |f+g|^p \, d\mu > 0$. Escribimos $|f+g|^p$ en forma

$$|f+g|^p = |f+g| \, |f+g|^{p-1} \le |f| \, |f+g|^{p-1} + |g| \, |f+g|^{p-1},$$

luego integramos ambos lados y aplicamos la desigualdad de Hölder:

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu \le \left(\left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \right) \left(\int_X |f+g|^{q(p-1)} \, d\mu \right)^{1/q}. \tag{9}$$

De la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se sigue que $q(p-1) = p$. Dividimos ambos lados de (9) entre $\left(\int_X |f+g|^p \right)^{1/q}$ y notamos que $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. $\square$