

El lema de Vitali sobre cubiertas

Usamos la notación μ para la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y la notación μ^* para la medida exterior inducida por la medida de Lebesgue.

1 Definición (cubierta de Vitali de un conjunto). Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{V} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$. Se dice que \mathcal{V} es una *cubierta de Vitali de X* , si:

- 1) los elementos de \mathcal{V} son intervalos no triviales, es decir, para cada A en \mathcal{V} , A es un intervalo de \mathbb{R} y $\mu(A) > 0$;
- 2) para cada x en X y cada $\varepsilon > 0$ existe A en \mathcal{V} tal que $x \in A$ y $\mu(A) < \varepsilon$.

2 Observación. La condición 2) se puede sustituir por la siguiente condición equivalente: para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ tal que $X \subseteq \cup \mathcal{W}$ y los elementos de \mathcal{W} son intervalos de longitud menor que ε .

3 Ejemplo (intervalos con extremos racionales). $\mathcal{V} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$. Entonces \mathcal{V} es una cubierta de Vitali de \mathbb{R} .

4 Lema. Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, \mathcal{V} una cubierta de Vitali de X , F un conjunto cerrado y $x \in X \setminus F$. Entonces existe A en \mathcal{V} tal que $x \in A$ y $A \cap F = \emptyset$.

Demostración. Pongamos $\delta = d(x, F)$. Como $x \notin F$ y $F = \text{cl}(F)$, tenemos $x \notin \text{cl}(F)$, así que $\delta > 0$. Usando la definición de la cubierta de Vitali, encontramos A en \mathcal{V} tal que $x \in A$ y $\mu(A) < \delta$. Entonces A está contenido en $]x - \delta, x + \delta[$ y por lo tanto $A \cap F = \emptyset$. \square

5 Teorema (el lema de Vitali sobre cubiertas de Vitali). Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $\mu^*(X) < +\infty$, \mathcal{V} una cubierta de Vitali de X , $\varepsilon > 0$. Entonces existe una lista finita A_1, \dots, A_n de elementos de \mathcal{V} tal que A_1, \dots, A_n son disjuntos a pares y

$$\mu^* \left(X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k \right) < \varepsilon.$$

Demostración. 1. Es suficiente demostrar este resultado lema para el caso cuando todos los elementos de \mathcal{V} son intervalos cerrados. En efecto, sustituyendo cada elemento de \mathcal{V} por su cerradura, obtenemos una cubierta de Vitali, y los elementos no cambian su medida.

2. Usando la suposición que $\mu^*(X) < +\infty$ encontramos un conjunto abierto Y tal que $X \subseteq Y$ y $\mu(Y) < +\infty$. Es fácil verificar (ejercicio) que $\{A \in \mathcal{V} : A \subseteq Y\}$ es una cubierta de Vitali de X . En lo que sigue, vamos a trabajar solamente con los elementos de \mathcal{V} contenidos en Y . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A \subseteq Y$ para todo A en \mathcal{V} .

3. Vamos a construir intervalos A_k , $k \in \mathbb{N}$, de manera “avariciosa”. Construimos por inducción una sucesión de números, $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, y dos sucesiones de conjuntos, $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(U_k)_{k=1}^{\infty}$. Sean $U_0 := \emptyset$,

- $\lambda_k := \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{V}, A \cap U_{k-1} = \emptyset\}$;
- $A_k \in \mathcal{V}$ se elige de tal manera que $A_k \cap U_{k-1} = \emptyset$ y $\mu(A_k) > \frac{1}{2}\lambda_k$;
- $U_k := U_{k-1} \cup A_k = \bigcup_{j=1}^k A_j$.

Si en algún paso $A \subseteq U_{k-1}$, entonces ya tenemos la conclusión del lema. Si X no está contenido en U_{k-1} , entonces por el Lema 4 obtenemos $\{A \in \mathcal{V} : A \cap U_{k-1} = \emptyset\} \neq \emptyset$, y el proceso se puede continuar.

4. Por construcción, $(A_k)_{k=1}^\infty$ es una sucesión de conjuntos disjuntos. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{j=1}^k \mu(A_j) = \mu(U_k) \leq \mu(Y).$$

Por eso la serie $\sum_{k=1}^\infty \lambda(A_k)$ converge. Elijamos n tal que $\sum_{k=n+1}^\infty \mu(A_k) < \frac{\varepsilon}{5}$, y demos-tremos que la lista A_1, \dots, A_n satisface la conclusión del lema. Hay que mostrar que $\mu^*(X \setminus U_n) < \varepsilon$. Para eso, vamos a probar que $X \setminus U_n \subseteq \bigcup_{k=n+1}^\infty J_k$, donde J_k es el intervalo con el mismo centro c_k que A_k , pero con $\mu(J_k) = 5\mu(A_k)$.

5. Sea $x \in X \setminus U_n$. Usando el Lema 4 elegimos $B \in \mathcal{V}$ tal que $x \in B$ y $B \cap U_n = \emptyset$. Mostremos que si k es suficientemente grande, entonces B intersecciona con U_k . Para todo $k \in \mathbb{N}$, si $B \cap U_k = \emptyset$, entonces por definición de λ_k tenemos que $\lambda_{k+1} \geq \mu(B)$. Luego

$$\mu(B) \leq \lambda_{k+1} < 2\mu(A_{k+1}).$$

Como $\mu(B) > 0$ y $\mu(A_{k+1}) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, la desigualdad $\mu(B) < 2\mu(A_{k+1})$ no puede ser cierta para todo k . Sea k el mínimo índice tal que $B \cap U_k \neq \emptyset$. Entonces $B \cap U_{k-1} = \emptyset$ y $B \cap A_k \neq \emptyset$. Sea $y \in B \cap A_k$. Notemos que $k > n$, $\mu(B) \leq \lambda_k \leq 2\mu(A_k)$,

$$|x - c_k| \leq |x - y| + |y - c_k| \leq \mu(B) + \frac{1}{2}\mu(A_k) \leq \frac{5}{2}\mu(A_k) = \frac{1}{2}\mu(J_k).$$

Por lo tanto $x \in J_k$. Concluimos que $X \setminus U_n \subseteq \bigcup_{k=n+1}^\infty J_k$ y

$$\mu^*(X \setminus U_n) \leq \sum_{k=n+1}^\infty \mu^*(J_k) = 5 \sum_{k=n+1}^\infty \mu(A_k) < \varepsilon. \quad \square$$