El lema de Vitali sobre cubiertas

Usamos la notación μ para la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y la notación μ^* para la medida exterior inducida por la medida de Lebesgue.

1 Definición (cubierta de Vitali de un conjunto)**.** Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{V} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$. Se dice que $\mathcal{V}$ es una *cubierta de Vitali de* X, si:

1) los elementos de $\mathcal{V}$ son intervalos no triviales, es decir, para cada E en $\mathcal{V}$, E es un intervalo de $\mathbb{R}$ y $\mu(E) > 0$;

2) para cada x en X y cada $\varepsilon > 0$ existe E en $\mathcal{V}$ tal que $x \in E$ y $\mu(E) < \varepsilon$.

2 Observación. La condición 2) se puede sustituir por la siguiente condición equivalente: para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ tal que $X \subseteq \cup\mathcal{W}$ y los elementos de $\mathcal{W}$ son intervalos de longitud menor que ε.

3 Ejemplo (intervalos con extremos racionales)**.**

$$\mathcal{V} \coloneqq \Big\{ \,]a,b[\, : a,b \in \mathbb{Q},\ a < b \Big\}.$$

Entonces, $\mathcal{V}$ es una cubierta de Vitali de $\mathbb{R}$.

4 Lema. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{V}$ una cubierta de Vitali de X, F un conjunto cerrado y $x \in X \setminus F$. Entonces, existe E en $\mathcal{V}$ tal que $x \in A$ y $E \cap F = \varnothing$.*

Demostración. Pongamos $\delta = d(x, F)$. Como $x \notin F$ y $F = \operatorname{cl}(F)$, tenemos $x \notin \operatorname{cl}(F)$, así que $\delta > 0$. Usando la definición de la cubierta de Vitali, encontramos E en $\mathcal{V}$ tal que $x \in E$ y $\mu(E) < \delta$. Entonces, E está contenido en $]x - \delta, x + \delta[$ y por lo tanto $E \cap F = \varnothing$. □

5 Teorema (el lema de Vitali sobre cubiertas de Vitali)**.** *Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $\mu^*(X) < +\infty$, $\mathcal{V}$ una cubierta de Vitali de X, $\varepsilon > 0$. Entonces, existe una lista finita $A_1, \ldots, A_n$ de elementos de $\mathcal{V}$ tal que $A_1, \ldots, A_n$ son disjuntos a pares y*

$$\mu^*\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) < \varepsilon.$$

Demostración. 1. Es suficiente demostrar este resultado para el caso cuando todos los elementos de $\mathcal{V}$ son intervalos cerrados. En efecto, sustituyendo cada elemento de $\mathcal{V}$ por su cerradura, obtenemos una cubierta de Vitali, y los elementos no cambian su medida.

2. Usando la suposición que $\mu^*(X) < +\infty$, encontramos un conjunto abierto Y tal que $X \subseteq Y$ y $\mu(Y) < +\infty$. Es fácil verificar (ejericio) que $\{E \in \mathcal{V} \colon E \subseteq Y\}$ es una cubierta de Vitali de X. En lo que sigue, vamos a trabajar solamente con los elementos de $\mathcal{V}$ contenidos en Y. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $E \subseteq Y$ para cada E en $\mathcal{V}$.

3. Vamos a construir intervalos A_k, $k \in \mathbb{N}$, de manera "avariciosa". Construimos por inducción una sucesión de números, $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, y dos sucesiones de conjuntos, $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(U_k)_{k=1}^{\infty}$. Sean $U_0 \coloneqq \varnothing$,

- $\lambda_k \coloneqq \sup\{\mu(E)\colon\ E \in \mathcal{V},\ E \cap U_{k-1} = \varnothing\}$;
- $A_k \in \mathcal{V}$ se elige de tal manera que $A_k \cap U_{k-1} = \varnothing$ y $\mu(A_k) > \frac{1}{2}\lambda_k$;
- $U_k \coloneqq U_{k-1} \cup A_k = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} A_j$.

Si en algún paso $X \subseteq U_{k-1}$, entonces ya tenemos la conclusión del lema. Si X no está contenido en U_{k-1}, entonces por el Lema 4 obtenemos $\{E \in \mathcal{V}\colon\ E \cap U_{k-1} = \varnothing\} \neq \varnothing$, y el proceso se puede continuar.

4. Por construcción, $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(A_k) = \mu(U_k) \leq \mu(Y).$$

Por eso la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$ converge. Elijamos n tal que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) < \frac{\varepsilon}{5}$, y demostremos que la lista $A_1, \ldots, A_n$ satisface la conclusión del lema. Hay que mostrar que $\mu^*(X \setminus U_n) < \varepsilon$. Para eso, vamos a probar que $X \setminus U_n \subseteq \bigcup_{k=n+1}^{\infty} G_k$, donde G_k es el intervalo cerrado con el mismo centro c_k que A_k, pero con $\mu(G_k) = 5\mu(A_k)$. En otras palabras, si $A_k = [c_k - r_k, c_k + r_k]$, entonces $G_k = [c_k - 5r_k, c_k + 5r_k]$.

5. Sea $x \in X \setminus U_n$. Usando el Lema 4, elegimos B en $\mathcal{V}$ tal que $x \in B$ y $B \cap U_n = \varnothing$. Mostremos que si k es suficientemente grande, entonces B tiene intersección no vacía con U_k. Para cada k en $\mathbb{N}$, si $B \cap U_k = \varnothing$, entonces por definición de λ_k tenemos que $\lambda_{k+1} \geq \mu(B)$. Luego

$$\mu(B) \leq \lambda_{k+1} < 2\mu(A_{k+1}).$$

Como $\mu(B) > 0$ y $\mu(A_{k+1}) \to 0$ cuando $k \to \infty$, la desigualdad $\mu(B) < 2\mu(A_{k+1})$ no puede ser cierta para cada k. Pongamos

$$j \coloneqq \min\bigl\{k \in \mathbb{N}\colon\ B \cap U_k \neq \varnothing\bigr\}.$$

Entonces,

$$B \cap U_{j-1} = \varnothing, \qquad B \cap U_j \neq \varnothing.$$

Por eso $B \cap A_j \neq \varnothing$. Sea $y \in B \cap A_j$. Notemos que $j > n$ y $\mu(B) \leq \lambda_j \leq 2\mu(A_j)$. Sea c_j el centro de A_j. Entonces,

$$|x - c_j| \leq |x - y| + |y - c_j| \leq \mu(B) + \frac{1}{2}\mu(A_j) \leq \frac{5}{2}\mu(A_j) = \frac{1}{2}\mu(G_j).$$

Por lo tanto, $x \in G_j$. Concluimos que $X \setminus U_n \subseteq \bigcup_{k=n+1}^{\infty} G_k$ y

$$\mu^*(X \setminus U_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(G_k) = 5 \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon. \qquad \square$$