Teorema de la convergencia de Vitali para sucesiones uniformemente integrables

Tarea adicional

Estudiantes que resolvieron la tarea: ???.
Editor de la tarea: Egor Maximenko

21 de junio de 2021

Objetivos. Estudiar el concepto de la *integrabilidad uniforme* de un conjunto de funciones (o de una familia de funciones) y demostrar el teorema de la convergencia de Vitali.

Prerrequisitos. Integral y sus propiedades, el lema de Fatou, el teorema de Egórov.

Conjuntos de funciones uniformemente integrables

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Un papel crucial en esta teoría hace el conjunto de los puntos donde una función f toma valores absolutos más grandes que un número dado, y la integral de $|f|$ sobre este conjunto.

1 Notación. Dada una función $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y un número $M > 0$, pongamos

$$A(f, M) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f(x)| \geq M\}, \qquad V(f, \mu, M) \coloneqq \int_{A(f,M)} |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Como la medida μ será fija en todos los razonamientos, en vez de $V(f, \mu, M)$ escribiremos solo $V(f, M)$.

2 Definición. conjunto de funciones uniformemente integrable Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Se dice que $\mathcal{C}$ es *uniformemente integrable* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que para cada f en $\mathcal{C}$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists M > 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C} \qquad V(f, \mu, M) < \varepsilon.$$

La definición admite varias otras formas equivalentes, cercanas entre si. Primero, escribimos la integral $V(f,M)$ en otras formas equivalentes.

3 Proposición. *Sea $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$. Entonces*

$$\int_{A(f,M)} |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_{A(f,M)} |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_X (\mathbb{1}_{[M,+\infty)} \circ |f|) \cdot |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Hay que demostrar esta proposición. □

Segundo, es fácil ver que la expresión $V(f,M)$ depende de M de manera decreciente.

4 Proposición. *Sea $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$. Entonces la familia de conjuntos $(A(f,M))_{M>0}$ es decreciente y la familia de números $(V(f,M))_{M>0}$ es decreciente, es decir, para cualesquiera $M_1, M_2 > 0$ con $M_1 < M_2$ se tiene*

$$A(f,M_1) \supseteq A(f,M_2), \qquad V(f,M_1) \geq V(f,M_2).$$

Usando esta observación, podemos dar otras formas equivalentes de la Definición 2.

5 Proposición. *Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto de $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$\mathcal{C}$ es uniformemente integrable,*

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \sup\limits_{f \in \mathcal{C}} V(f,M) < \varepsilon,$

(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \inf\limits_{M>0} \quad \sup\limits_{f \in \mathcal{C}} V(f,M) < \varepsilon,$

(d) $\inf_{M>0} V(f,M) = 0,$

(e) $\lim\limits_{M \to +\infty} \sup\limits_{f \in \mathcal{C}} V(f,M) = 0.$

Demostración. Posiblemente, será cómodo explicar las equivalencias (a) $\iff$ (b), (b) $\iff$ (c), etc. Pueden demostrar solo un par de implicaciones que les gusten. □

Familias de funciones uniformemente integrables

La siguiente definición es muy similar a la Definición 2. Formalmente, aplicamos la Definición 2 al conjunto $\mathcal{C} \coloneqq \{f_j \colon \ j \in J\}$.

6 Definición (familia de funciones uniformemente integrable)**.** Sea $(f_j)_{j \in J}$ una familia de funciones pertenecientes a $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$. Se dice que $\mathcal{C}$ es *uniformemente integrable* si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists M > 0 \qquad \forall j \in J \qquad V(f_j, M) < \varepsilon.$$

7 Ejemplo. Consideremos $[0,1]$ con la medida de Lebesgue μ. Definimos la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante le siguiente regla:

$$f_n = n\,\mathbb{1}_{[0,1/n]}.$$

Mostremos que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es uniformemente integrable.

Demostración. Escribir el razonamiento. □

8 Ejemplo. Consideremos $[0,1]$ con la medida de Lebesgue μ. Definimos la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante la siguiente regla:

$$f_n = \sqrt{n}\,\mathbb{1}_{[0,1/n]}.$$

Mostremos que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.

Demostración. Escribir el razonamiento. □

9 Proposición (una familia de funciones dominada por una función integrable es uniformemente integrable)**.** *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida y sea $(f_j)_{j\in J}$ una familia de funciones en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$ dominada por una función integrable h:*

1. $h\in\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,[0,+\infty])$.
2. $|f_j|\le h$ *para cada* j *en* J.

Entonces a familia $(f_j)_{j\in J}$ es uniformemente integrable.

Teorema de la convergencia de Vitali y su recíproco

10 Teorema (teorema de la convergencia de Vitali)**.** *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida finita, es decir, $\mu(X)<+\infty$. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$ con las siguientes propiedades.*

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es uniformemente integrable.*
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge μ-c.t.p. a una función g.*
3. $\mu(\{x\in X:\ g(x)=+\infty\})=0$.

Entonces $f\in\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$ y

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-g|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostración. Hay que escribir una demostración. □

11 Observación. Para espacios de medida finita, debido a la Proposición 9, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se puede obtener como un corolario del Teorema 10.

El siguiente teorema se puede considerar como el recíproco al teorema de la convergencia de Vitali

12 Teorema. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita, esto es, $\mu(X) < +\infty$. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que para cada E en $\mathcal{F}$ existe un límite de la sucesión de integrales*

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.

Demostración. Se recomienda buscar ideas de demostración en libros. □