Prueba de Schur para operadores integrales

Objetivos. Demostrar la versión más simple de la prueba de Schur que permite acotar operadores integrales en espacios L^2.

Prerrequisitos. Teorema de Tonelli, desigualdad de Hölder.

1 Proposición. *Sean $(X,\mathcal{F},\mu)$, $(Y,\mathcal{G},\nu)$ espacios de medida σ-finita, y sea $K \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F}\times\mathcal{G},\mathbb{C})$ tal que*

$$C_1 \coloneqq \sup_{x\in X}\int_Y |K(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y) < +\infty, \qquad C_2 \coloneqq \sup_{y\in Y}\int_X |K(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

Entonces para cada f en $L^2(Y,\mu)$ y μ-casi todo x en X

$$\int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|\,\mathrm{d}\nu(y) < +\infty, \tag{1}$$

el operador integral $A_K\colon L^2(Y,\mu)\to L^2(X,\nu)$, definido mediante la regla

$$(A_K f)(x) \coloneqq \int_Y K(x,y)\,f(y)\,\mathrm{d}\nu(y),$$

es continuo, y $\|A_K\| \le \sqrt{C_1 C_2}$.

Demostración. Denotemos la integral en (1) por $M(x)$. Para acotarla, aplicamos la desigualdad de Hölder con $p=2$:

$$\begin{aligned}
M(x) &= \int_Y \sqrt{|K(x,y)|}\,\sqrt{|K(x,y)|}\,|f(y)|\,\mathrm{d}\nu(y)\\
&\le \left(\int_Y |K(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y)\right)^{1/2}\left(\int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|^2\,\mathrm{d}\nu(y)\right)^{1/2}\\
&\le \sqrt{C_1}\left(\int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|^2\,\mathrm{d}\nu(y)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ahora integremos M^2 sobre X y apliquemos el teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned}
\int_X M(x)^2\,\mathrm{d}\mu(x) &\le C_1\int_X\int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|^2\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&\le C_1\int_Y\left(\int_X |K(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x)\right)|f(y)|^2\,\mathrm{d}\nu(y)\\
&\le C_1 C_2\|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Luego $M(x) < +\infty$ para μ-casi todo x en X. Más aún, como $|(A_K f)(x)| \le M(x)$, obtenemos que $\|(A_K f)\|_2 \le \sqrt{C_1 C_2}\|f\|_2^2$. □