Bases de Schauder

Objetivos. Estudiar el concepto de base de Schauder con varios ejemplos.

Prerrequisitos. Espacios normados, convergencia de series.

1 Definición. Sea V un espacio normado complejo. Una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores en V se llama *base de Schauder* si para cada x en V existe una única sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{m}\alpha_n b_n - v\right\| = 0.$$

2 Proposición. *Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V. Entonces la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente, esto es, para cada m en $\mathbb{N}$ y cualquiera $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ en $\mathbb{C}$, si*

$$\sum_{n=1}^{m}\alpha_k b_k = 0_V,$$

entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$.

Demostración. Sean $m\in\mathbb{N}$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{C}$. Pongamos

$$v \coloneqq \sum_{k=1}^{m}\alpha_k b_k.$$

Supongamos que $v = 0_V$. Definimos $\alpha_k \coloneqq 0$ para $k > m$ y pongamos $\xi_k \coloneqq 0$ para cada k en $\mathbb{N}$. Entonces para cada n con $n \ge m$ tenemos

$$v = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k b_k = 0_V = \sum_{k=1}^{n}\xi_k b_k,$$

así que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k b_k - v\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k b_k - v\right\| = 0.$$

Por definición de la base de Schauder, la sucesión de coeficientes con esta propiedad se determina de manera única, luego $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. En particular, obtenemos $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. $\square$

3 Definición. Para cada m en $\mathbb{N}$, denotemos por e_m a la sucesión $(\delta_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

4 Lema. *Sean* $p \in [1, +\infty]$, $x \in \ell^p(\mathbb{N})$, $j \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$|x_j| \le \|x\|_p.$$

5 Proposición. *Para cada* p *en* $[1, +\infty)$, *la sucesión* $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *es una base de Schauder en* $\ell^p(\mathbb{N})$.

Demostración. Existencia de la descomposición. Sea $x \in \ell^p(\mathbb{N})$. Pongamos $\alpha_k := x_k$ para cada k en $\mathbb{N}$. Entonces

$$x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = \big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\big),$$

y

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

La última expresión tiende a cero cuando n tiende a infinito, porque la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ converge.

Unicidad de la descomposición. Supongamos que $x \in \ell^p(\mathbb{N})$, $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_p = 0.$$

Denotemos la suma $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ por s_n. Fijamos j en $\mathbb{N}$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \ge j$ tenemos

$$(x - s_n)_j = x_j - \alpha_k.$$

Aplicamos el Lema 4:

$$|x_j - \alpha_j| \le \|x - s_n\|_p \to 0, \quad n \to \infty.$$

Concluimos que $\alpha_j = x_j$ para cada j. $\square$

6 Proposición. *La sucesión* $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *es una base de Schauder en* $c_0(\mathbb{N})$.

7 Ejercicio. Encontrar una base de Schauder en $c(\mathbb{N})$.

8 Proposición. *La sucesión* $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *no es base de Schauder en* $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Demostración. Consideremos la sucesión constante 1:

$$a = (1, 1, \ldots) = (1)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Vamos a demostrar que para cualquier sucesión $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ se tiene que

$$\left\| a - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\|_\infty \not\to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

En efecto,

$$\left\| a - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\|_\infty \geq \sup_{k>n} |a_k| = 1.$$ □

Luego vamos a demostrar que cualquier espacio normado con base de Schauder es separable (tiene un subconjunto denso numerable), y el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no es separable, así que en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no hay base de Schauder.