

El teorema de Riesz sobre la bola unitaria (un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko,

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

15 de marzo de 2022

Plan

- 1 Repaso: en espacios de dimensión finita, las bolas cerradas son compactas
- 2 El lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria
- 3 El teorema de Frigyes Riesz sobre las bolas en espacios normados de dimensión infinita

Plan

- 1 Repaso: en espacios de dimensión finita, las bolas cerradas son compactas
- 2 El lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria
- 3 El teorema de Frigyes Riesz sobre las bolas en espacios normados de dimensión infinita

Notación: bolas cerradas

Dado un espacio normado V , un punto $a \in V$ y un número $r > 0$, denotamos por $C(a, r)$ la bola cerrada con centro a de radio r :

$$C(a, r) := \{v \in V : \|v - a\| \leq r\}.$$

Es fácil ver que $C(a, r)$ se obtiene de $C(0_V, 1)$ al estirar y desplazar:

$$C(a, r) = a + r C(0_V, 1).$$

Denotamos por $S(a, r)$ la esfera correspondiente:

$$S(a, r) := \{v \in V : \|v - a\| = r\}.$$

Las bolas cerradas en \mathbb{C}^n son compactas

Proposición

Sea N una norma en \mathbb{C}^n . Entonces la bola unitaria correspondiente $C(0_n, 1)$ es compacta.

Las bolas cerradas en \mathbb{C}^n son compactas

Proposición

Sea N una norma en \mathbb{C}^n . Entonces la bola unitaria correspondiente $C(0_n, 1)$ es compacta.

Demostración. N induce la misma topología que $\|\cdot\|_2$.

$C(0_n, 1)$ es cerrada y acotada, luego compacta. □

Las bolas cerradas en espacios normados de dim. finita son compactas

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita.

Entonces la bola $C(0_V, 1)$ en V es compacta.

Las bolas cerradas en espacios normados de dim. finita son compactas

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita.

Entonces la bola $C(0_V, 1)$ en V es compacta.

Demostración. Usando una base de V , construimos un homeomorfismo lineal $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$.

Definimos $N: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$,

$$N(x) := \|Tx\|_V.$$

Las bolas cerradas en espacios normados de dim. finita son compactas

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita.

Entonces la bola $C(0_V, 1)$ en V es compacta.

Demostración. Usando una base de V , construimos un homeomorfismo lineal $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$.

Definimos $N: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$,

$$N(x) := \|Tx\|_V.$$

Entonces N es una norma en \mathbb{C}^n ,

Las bolas cerradas en espacios normados de dim. finita son compactas

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita.

Entonces la bola $C(0_V, 1)$ en V es compacta.

Demostración. Usando una base de V , construimos un homeomorfismo lineal $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$.

Definimos $N: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$,

$$N(x) := \|Tx\|_V.$$

Entonces N es una norma en \mathbb{C}^n , y $C_N(0_n, 1) = \{x \in \mathbb{C}^n: N(x) \leq 1\}$ es compacto.

Las bolas cerradas en espacios normados de dim. finita son compactas

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita.

Entonces la bola $C(0_V, 1)$ en V es compacta.

Demostración. Usando una base de V , construimos un homeomorfismo lineal $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$.

Definimos $N: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$,

$$N(x) := \|Tx\|_V.$$

Entonces N es una norma en \mathbb{C}^n , y $C_N(0_n, 1) = \{x \in \mathbb{C}^n: N(x) \leq 1\}$ es compacto.

Su imagen $C_V(0_V, 1) = T(C_N(0_n, 1))$ es un compacto en V . □

La distancia entre un punto y un conjunto (repass)

En un espacio métrico (en particular, en un espacio normado),
si x es un punto y A es un conjunto,

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Por la definición del ínfimo, si $d(x, A) < +\infty$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe b en A tal que

$$d(x, b) < d(x, A) + \varepsilon.$$

Recordamos que

$$x \in \text{clos}(A) \iff d(x, A) = 0.$$

Plan

- 1 Repaso: en espacios de dimensión finita, las bolas cerradas son compactas
- 2 El lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria
- 3 El teorema de Frigyes Riesz sobre las bolas en espacios normados de dimensión infinita

Lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

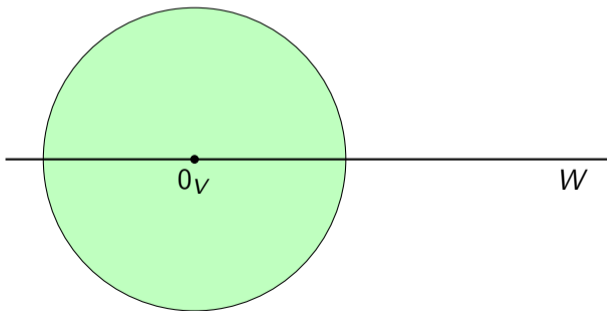
Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V , $W \neq V$, $r \in (0, 1)$.

Entonces existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.

Lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V , $W \neq V$, $r \in (0, 1)$.

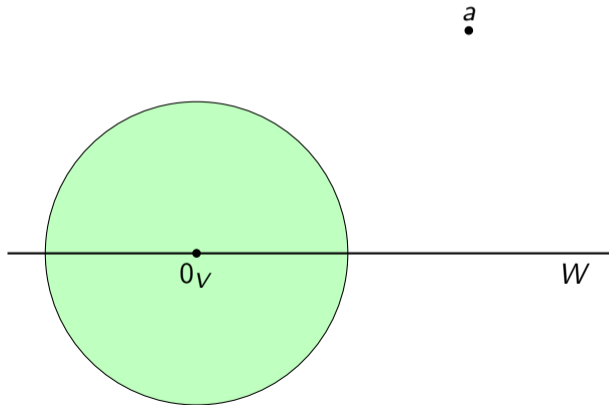
Entonces existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.



Lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V , $W \neq V$, $r \in (0, 1)$.

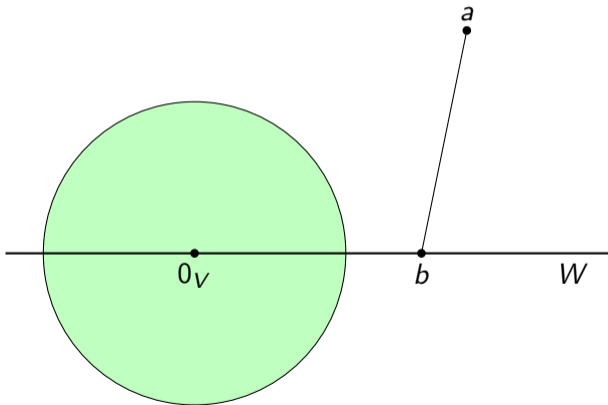
Entonces existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.



Lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V , $W \neq V$, $r \in (0, 1)$.

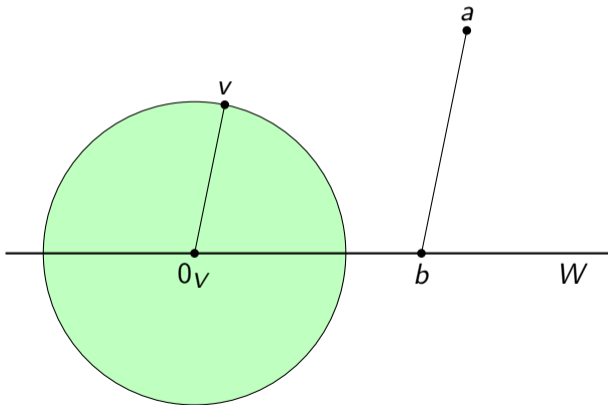
Entonces existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.



Lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V , $W \neq V$, $r \in (0, 1)$.

Entonces existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.



Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.

Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.

Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.

Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.

Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.

Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$.

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.

Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.

Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$. Entonces $u \in W$ y $\|u - a\| \geq R$. Luego

$$\|v - w\| =$$

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.

Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.

Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$. Entonces $u \in W$ y $\|u - a\| \geq R$. Luego

$$\|v - w\| = \left\| \frac{a - b}{\|a - b\|} - \frac{u - b}{\|a - b\|} \right\| =$$

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.

Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.

Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$. Entonces $u \in W$ y $\|u - a\| \geq R$. Luego

$$\|v - w\| = \left\| \frac{a - b}{\|a - b\|} - \frac{u - b}{\|a - b\|} \right\| = \left\| \frac{u - a}{\|a - b\|} \right\| =$$

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.

Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.

Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$. Entonces $u \in W$ y $\|u - a\| \geq R$. Luego

$$\|v - w\| = \left\| \frac{a - b}{\|a - b\|} - \frac{u - b}{\|a - b\|} \right\| = \left\| \frac{u - a}{\|a - b\|} \right\| = \frac{\|u - a\|}{\|a - b\|} \geq$$

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.

Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.

Elegimos $b \in W$ tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$. Entonces $u \in W$ y $\|u - a\| \geq R$. Luego

$$\|v - w\| = \left\| \frac{a - b}{\|a - b\|} - \frac{u - b}{\|a - b\|} \right\| = \left\| \frac{u - a}{\|a - b\|} \right\| = \frac{\|u - a\|}{\|a - b\|} \geq \frac{R}{R + \varepsilon} > r.$$

Plan

- 1 Repaso: en espacios de dimensión finita, las bolas cerradas son compactas
- 2 El lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria
- 3 El teorema de Frigyes Riesz sobre las bolas en espacios normados de dimensión infinita

Conjuntos totalmente acotados en espacios métricos (repaso)

Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que X es totalmente acotado, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $A \subseteq X$ tal que

$$\forall x \in X \quad d(x, A) < \varepsilon.$$

Un conjunto $Y \subseteq X$ se llama totalmente acotado, si el espacio $(Y, d|_{Y \times Y})$ es totalmente acotado.

Criterio de conjuntos no totalmente acotados (repass)

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) A no es totalmente acotado.
- (b) Existen $\delta > 0$ y $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tales que

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \quad (j \neq k \implies d(x_j, x_k) \geq \delta).$$

Criterio de conjuntos no totalmente acotados (repass)

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) A no es totalmente acotado.
- (b) Existen $\delta > 0$ y $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tales que

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \quad (j \neq k \implies d(x_j, x_k) \geq \delta).$$

Ejercicio. Recordar una demostración.

Teorema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sea V un espacio normado de dimensión infinita.

Entonces la esfera unitaria cerrada $S(0_V, 1)$ en V no es totalmente acotada.

Teorema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sea V un espacio normado de dimensión infinita.

Entonces la esfera unitaria cerrada $S(0_V, 1)$ en V no es totalmente acotada.

Corolario: la bola cerrada $C(0_V, 1)$ no es totalmente acotada.

Teorema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sea V un espacio normado de dimensión infinita.

Entonces la esfera unitaria cerrada $S(0_V, 1)$ en V no es totalmente acotada.

Corolario: la bola cerrada $C(0_V, 1)$ no es totalmente acotada.

Corolario: la bola $C(0_V, 1)$ no es compacta.

Teorema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sea V un espacio normado de dimensión infinita.

Entonces la esfera unitaria cerrada $S(0_V, 1)$ en V no es totalmente acotada.

Corolario: la bola cerrada $C(0_V, 1)$ no es totalmente acotada.

Corolario: la bola $C(0_V, 1)$ no es compacta.

Corolario: la bola abierta $B(0_V, 1)$ no es totalmente acotada.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0, 1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $S := S(0_V, 1)$.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0, 1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $S := S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0, 1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $S := S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están contruidos x_1, \dots, x_n . Mostremos cómo construir x_{n+1} .

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0, 1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $S := S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están contruidos x_1, \dots, x_n . Mostremos cómo construir x_{n+1} .

Pongamos $W_n := \text{lin}(x_1, \dots, x_n)$.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0, 1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $S := S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están contruidos x_1, \dots, x_n . Mostremos cómo construir x_{n+1} .

Pongamos $W_n := \text{lin}(x_1, \dots, x_n)$. Entonces W_n es cerrado.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0, 1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $S := S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están contruidos x_1, \dots, x_n . Mostremos cómo construir x_{n+1} .

Pongamos $W_n := \text{lin}(x_1, \dots, x_n)$. Entonces W_n es cerrado.

Como V es de dimensión infinita, $W_n \neq V$.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0, 1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $S := S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están contruidos x_1, \dots, x_n . Mostremos cómo construir x_{n+1} .

Pongamos $W_n := \text{lin}(x_1, \dots, x_n)$. Entonces W_n es cerrado.

Como V es de dimensión infinita, $W_n \neq V$.

Usando el lema de Riesz encontramos x_{n+1} en S tal que

$$d(x_{n+1}, W_n) \geq r.$$

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0, 1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $S := S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están contruidos x_1, \dots, x_n . Mostremos cómo construir x_{n+1} .

Pongamos $W_n := \text{lin}(x_1, \dots, x_n)$. Entonces W_n es cerrado.

Como V es de dimensión infinita, $W_n \neq V$.

Usando el lema de Riesz encontramos x_{n+1} en S tal que

$$d(x_{n+1}, W_n) \geq r.$$

Entonces para cada $k \leq n$ tenemos $\|x_{n+1} - x_k\| \geq r$.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0, 1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $S := S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están contruidos x_1, \dots, x_n . Mostremos cómo construir x_{n+1} .

Pongamos $W_n := \text{lin}(x_1, \dots, x_n)$. Entonces W_n es cerrado.

Como V es de dimensión infinita, $W_n \neq V$.

Usando el lema de Riesz encontramos x_{n+1} en S tal que

$$d(x_{n+1}, W_n) \geq r.$$

Entonces para cada $k \leq n$ tenemos $\|x_{n+1} - x_k\| \geq r$.

Obviamente, la sucesión construida tiene la siguiente propiedad:

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \quad (j \neq k \implies \|x_j - x_k\| \geq r).$$

Varias condiciones equivalentes a la condición $\dim(V) < +\infty$

Ejercicio. Recordar la definición es espacio topológico localmente compacto.

Varias condiciones equivalentes a la condición $\dim(V) < +\infty$

Ejercicio. Recordar la definición de espacio topológico localmente compacto.

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo.

Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) V es de dimensión finita,
- (b) la bola $C(0_V, 1)$ es compacta,
- (c) la bola $C(0_V, 1)$ es totalmente acotada,
- (d) cada conjunto acotado en V es totalmente acotado,
- (e) cada conjunto cerrado y acotado en V es compacto,
- (f) V es localmente compacto.