Lema de Riesz y el teorema sobre la bola unitaria en espacios normados de dimensión infinita

Objetivos. Demostrar el lema de Riesz y deducir que la bola unitaria en espacios normados de dimensión infinita no es compacta.

Prerrequisitos. Espacios normados, la distancia de un punto a un conjunto, espacios métricos compactos.

1 Lema (Frigyes Riesz)**.** *Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V, $W \neq V$, $r \in (0,1)$. Entonces existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.*

Demostración. Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$. Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$. Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v \coloneqq \frac{a-b}{\|a-b\|}.$$

Demostremos que para cualquier w en W se cumple la desigualdad $\|v - w\| \geq r$. Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$. Entonces $u \in W$ y $\|u - a\| \geq R$. Luego

$$\|v - w\| = \left\| \frac{a-b}{\|a-b\|} - \frac{u-b}{\|a-b\|} \right\| = \left\| \frac{u-a}{\|a-b\|} \right\| = \frac{\|u-a\|}{\|a-b\|} \geq \frac{R}{R+\varepsilon} > r. \qquad \square$$

2 Ejercicio. En el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ construya un subespacio W tal que para cualquier v en $C(0,1)$ con $\|v\| = 1$ se cumple la desigualdad $d(v, W) < 1$.

3 Teorema (Frigyes Riesz)**.** *Sea V un espacio normado de dimensión infinita. Entonces la bola unitaria cerrada $C(0,1)$ en V no es totalmente acotada y no es compacta.*

Demostración. I. Sea $r \in (0,1)$. Construimos por inducción matemática una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $S(0,1)$ tal que $d(x_j, x_k) \geq r$ para cualesquiera j, k en $\mathbb{N}$ con $j \neq k$. Sea $x_1 \in S(0,1)$. Supongamos que ya están construidos los vectores $x_1, \ldots, x_p$ con la propiedad $d(x_j, x_k) \geq r$ para cualesquiera j, k en $\{1, \ldots, p\}$ con $j \neq k$. Consideramos el subespacio $W_p \coloneqq \ell(x_1, \ldots, x_p)$. Notamos que W_p es completo y por lo tanto cerrado en V. Como V no es de dimensión finita, $W_p \neq V$. Usando el Lema 1 encontramos x_{p+1} en $S(0,1)$ tal que $d(x_{p+1}, W_p) \geq r$. Entonces $d(x_{p+1}, x_j) \geq r$ para cada j en $\{1, \ldots, p\}$.

II. En la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no hay subsucesión de Cauchy. Luego $C(0,1)$ no es totalmente compacto. Otro razonamiento: cualquier $1/2$-red finita en $C(0,1)$ no cubre el conjunto $\{x_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}$, luego $C(0,1)$ no es totalmente acotado y por lo tanto no es compacto. $\square$

4 Corolario. *Sea V un espacio normado de dimensión infinita. Entonces la bola unitaria abierta $B(0,1)$ en V no es totalmente acotada.*