Particiones de Riemann de un intervalo

Objetivos. Definir el concepto de *particiones de Riemann* de un intervalo, estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Números reales, conjuntos finitos, listas de números, operaciones con conjuntos.

La palabra "partición" tiene varios sentidos diferentes en matemáticas: partición de un conjunto, partición entera. En este tema, para evitar confusiones, usaremos la frase "partición de Riemann".

En este tema fijamos dos números $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

1 Definición. Una *partición de Riemann* de $[a, b]$ es un subconjunto finito de $[a, b]$ que incluye a los puntos a, b. Denotemos por $\mathcal{RP}(a, b)$ al conjunto de todas las particiones de Riemann de $[a, b]$:

$$\mathcal{RP}(a, b) \coloneqq \Big\{ P \subseteq [a, b] : \quad P \text{ es finito, } \ a \in P, \ b \in P \Big\}.$$

2 Observación. Dada $P \in \mathcal{RP}(a, b)$, usualmente numeramos los elementos de P en el orden ascendiente, empezando con el índice 0:

$$P = \big\{ t_0, t_1, \ldots, t_m \big\}, \qquad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b. \tag{1}$$

A veces, es más cómodo tratar particiones de Riemann como listas (tuplas) de números.

3 Ejemplo (la partición de Riemann trivial)**.** $P = \{a, b\}$.

4 Ejemplo (la malla uniforme de m partes)**.** Sea $m \in \mathbb{N}$. Pongamos

$$t_j \coloneqq a + \frac{j(b-a)}{m} \qquad (j \in \{0, 1, \ldots, m\}),$$

$$P \coloneqq \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}.$$

Entonces, $P \in \mathcal{RP}(a, b)$.

5 Definición (relación de contención entre las particiones de Riemann de un intervalo)**.** Sean $P, Q \in \mathcal{RP}(a, b)$. Decimos que Q es un *refinamiento* de P y que P *está contenida* en Q, si $P \subseteq Q$.

6 Observación. Si tratamos P y Q como tuplas $(t_0, t_1, \ldots, t_m)$ y $(u_1, u_1, \ldots, u_n)$, entonces la afirmación que Q es un refinamiento de P significa lo siguiente:

$$\forall j \in \{0, \ldots, m\} \qquad \exists k \in \{0, \ldots, n\} \qquad t_j = u_k.$$

7 Proposición. *El conjunto* $\mathcal{RP}(a, b)$ *con la relación* $\subseteq$ *es un conjunto dirigido. En otras palabras,* $\subseteq$ *es un orden parcial en* $\mathcal{RP}(a, b)$*, y para cualesquiera* P, Q *en* $\mathcal{RP}(a, b)$ *existe* R *en* $\mathcal{RP}(a, b)$ *tal que* $P \subseteq R$ *y* $Q \subseteq R$*.*

Demostración. $R \coloneqq P \cup Q$. □

8 Definición (refinamiento unipuntual)**.** Sean $P, Q \in \mathcal{RP}(a, b)$. Decimos que Q es un refinamiento unipuntual de P, si $P \subseteq Q$ y $Q \setminus P$ consiste de un punto.

9 Proposición (sobre un refinamiento unipuntual)**.** *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$*,* $m \in \mathbb{N}$*,* $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ *tales que* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$*,* $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$*, y sea* Q *un refinamiento unipuntual de* P*. Entonces, existen* u *en* $Q \setminus P$ *y* j *en* $\{1, \ldots, m\}$ *tales que*

$$t_{j-1} < u < t_j.$$

En este caso,

$$Q = \{t_0, t_1, \ldots, t_{j-1}, u, t_j, \ldots, t_m\}.$$

Demostración. Como $Q \setminus P$ es un conjunto unipuntual, existe un u tal que $Q \setminus P = \{u\}$. Definimos j mediante la siguiente regla:

$$j \coloneqq \min(K), \qquad \text{donde} \qquad K \coloneqq \big\{k \in \{1, \ldots, m\} : \ t_j > u\big\}.$$

Notemos que $t_m = b \in P$, por eso $u \neq t_m$. Por lo tanto, $u < t_m$ y $m \in K$. Como K es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, K tiene un elemento mínimo. Lo denotamos por j. De la definición del elemento mínimo se sigue que $j - 1 \notin K$, luego $u > t_{j-1}$. □

10 Proposición. *Para cada* r *en* $\mathbb{N}$ *y cada* P, Q *en* $\mathcal{RP}(a, b)$ *tales que* $P \subseteq Q$ *y* $\#(Q \setminus P) = r$*, existen* $S_0, S_1, \ldots, S_{r-1}, S_r \in \mathcal{RP}(a, b)$ *tales que* $S_0 = P$*,* $S_r = Q$*, y para cada* j *en* $\{0, \ldots, r - 1\}$*,* S_{j+1} *es un refinamiento unipuntual de* S_j*.*

Demostración. Inducción matemática sobre r. □