Las integrales de Riemann y Lebesgue coinciden para las funciones continuas en intervalos cerrados

Objetivos. Demostrar que si $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, entonces la integral de Riemann de f coincide con la integral de Lebesgue.

Requisitos. Integral de Riemann, sumas de Darboux, integral de Lebesgue.

Denotemos por μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

1 Definición. Usamos la siguiente notación para las sumas de Darboux:

$$L(f,\tau) \coloneqq \sum_{j=1}^{m} \inf(f([\tau_{j-1},\tau_j]))\,(\tau_j - \tau_{j-1}),$$

$$U(f,\tau) \coloneqq \sum_{j=1}^{m} \sup(f([\tau_{j-1},\tau_j]))\,(\tau_j - \tau_{j-1}).$$

2 Teorema. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, y sea $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Entonces,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Sean

$$J_1 \coloneqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad J_2 \coloneqq \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\mu.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando el criterio de integrabilidad de Riemann en términos de sumas de Darboux, encontramos una partición τ tal que

$$U(f,\tau) - L(f,\tau) < \varepsilon.$$

Notemos que

$$L(f,\tau) \le J_1 \le U(f,\tau).$$

Definimos

$$v_j \coloneqq \inf(f([\tau_{j-1},\tau_j])), \qquad w_j \coloneqq \sup(f([\tau_{j-1},\tau_j])),$$

$$g \coloneqq \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{[\tau_{j-1},\tau_j]}, \qquad h \coloneqq \sum_{j=1}^{m} w_j \mathbb{1}_{[\tau_{j-1},\tau_j]}.$$

Entonces,

$$g \le f \le h,$$

$$L(f,\tau) = \int_{[a,b]} g\,\mathrm{d}\mu \le J_2 \le \int_{[a,b]} h\,\mathrm{d}\mu = U(f,\tau).$$

Por lo tanto, $|J_1 - J_2| < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $J_1 = J_2$. $\square$