El lema de Riemann–Lebesgue para los coeficientes de Fourier (un tema de análisis armónico)

Egor Maximenko
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2021-10-11

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente resultado, conocido como el lema de Riemann–Lebesgue.

Teorema

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}_k = 0.$$

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente resultado, conocido como el lema de Riemann–Lebesgue.

Teorema

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}_k = 0.$$

En otras palabras, este teorema afirma que si $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$.

Prerrequisitos.

- Los espacios $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.
- La densidad de $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.
- Los coeficientes de Fourier.
- El indicador de continuidad uniforme (el "módulo de continuidad").
- La continuidad uniforme de funciones continuas en un intervalo cerrado.

El espacio $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \Big\{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = f(x) \Big\}.$$

Funciones medibles 2π-periódicas y la seminorma extendida $\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F} :=$ la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$,

$\mu :=$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Funciones medibles 2π-periódicas y la seminorma extendida $\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F} :=$ la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$,

$\mu :=$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C}) := \big\{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C}) \colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2\pi) = f(x) \big\}.$$

Funciones medibles 2π-periódicas y la seminorma extendida $\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F} :=$ la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$,

$\mu :=$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C}) := \big\{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C}) \colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2\pi) = f(x) \big\}.$$

Definimos $\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}} \colon \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathcal{F},\mathbb{C}) \to [0,+\infty]$,

$$\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) :=$$

Funciones medibles 2π-periódicas y la seminorma extendida $\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F}$:= la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$,

μ := la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = f(x) \right\}.$$

Definimos $\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}} \colon \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \to [0, +\infty]$,

$$\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

El espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \quad \mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty \right\}.$$

El espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \quad \mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty \right\}.$$

$$\mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_{\mathbb{R}} \right\}.$$

El espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \quad \mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty \right\}.$$

$$\mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \quad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_{\mathbb{R}} \right\}.$$

El espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ se define como el espacio cociente

$$\mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) / \mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}).$$

Aproximación de funciones integrables por funciones continuas

Se sabe el siguiente hecho.

Proposición

Sea $F \in L^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $G \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ tal que

$$\|F - G\|_1 < \varepsilon.$$

Aproximación de funciones integrables por funciones continuas

Se sabe el siguiente hecho.

Proposición

Sea $F \in L^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $G \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ tal que

$$\|F - G\|_1 < \varepsilon.$$

Ejercicio. Demostrar el siguiente resultado.

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \varepsilon.$$

Coeficientes de Fourier

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} f(x)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x.$$

Coeficientes de Fourier

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} f(x)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x.$$

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $k \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$|\widehat{f}_k| \leq \|f\|_{1,2\pi\text{-per}}.$$

Coeficientes de Fourier

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} f(x)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x.$$

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $k \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$|\widehat{f}_k| \le \|f\|_{1,2\pi\text{-per}}.$$

Ejercicio. Recordar la demostración.

El indicador de la continuidad uniforme

Dada una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos $\omega_f\colon\ ]0,+\infty[\to [0,+\infty]$,

$$\omega_f(\delta) := \sup\Big\{ |f(x) - f(y)| : \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \le \delta \Big\}.$$

El indicador de la continuidad uniforme

Dada una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos $\omega_f\colon\ ]0,+\infty[\ \to [0,+\infty]$,

$$\omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|\colon\quad x, y \in \mathbb{R},\quad |x-y| \le \delta\Big\}.$$

Más formalmente,

$$\omega_f(\delta) := \sup\Big\{v \in [0,+\infty[\ \colon\quad \exists x, y \in \mathbb{R}\quad |x-y| \le \delta \quad \wedge \quad v = |f(x) - f(y)|\Big\}.$$

El indicador de la continuidad uniforme

Dada una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos $\omega_f\colon \;]0,+\infty[\to [0,+\infty[$,

$$\omega_f(\delta) := \sup\Big\{ |f(x) - f(y)| : \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad |x-y| \le \delta \Big\}.$$

Más formalmente,

$$\omega_f(\delta) := \sup\Big\{ v \in [0,+\infty[\; : \quad \exists x, y \in \mathbb{R} \quad |x-y| \le \delta \quad \wedge \quad v = |f(x)-f(y)| \Big\}.$$

Ejercicio. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Demostrar que ω_f es creciente:

$$\forall \delta_1, \delta_2 > 0 \qquad \Big(\; \delta_1 < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad \omega(\delta_1) \le \omega(\delta_2) \; \Big).$$

El indicador de la continuidad uniforme

$$\omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)| : \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \leq \delta\Big\}.$$

El indicador de la continuidad uniforme

$$\omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|: \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \le \delta\Big\}.$$

Observación.

Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \le \omega_f(|x - y|).$$

El indicador de la continuidad uniforme

$$\omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|: \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \le \delta\Big\}.$$

Observación.
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \le \omega_f(|x - y|).$$

Ejercicio. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Demostrar que

$$f \text{ es uniformemente continua} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

El indicador de continuidad de funciones continuas 2π-periódicas

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

La restricción $f\big|_{[0,3\pi]}$ es uniformemente continua.

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

La restricción $f|_{[0,3\pi]}$ es uniformemente continua.

Luego existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\forall t, u \in [0, 3\pi] \qquad \left(|t - u| \leq \delta_1 \qquad \Longrightarrow \qquad |f(t) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Pongamos

$$\delta_2 := \min\{\delta_1, \pi\}.$$

Demostración, continuación

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \leq \delta$.

Demostración, continuación

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \leq \delta$.

Consideremos el caso $x \leq y$. El caso $x > y$ es similar.

Demostración, continuación

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \le \delta$.

Consideremos el caso $x \le y$. El caso $x > y$ es similar.

Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor .$$

Demostración, continuación

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \leq \delta$.

Consideremos el caso $x \leq y$. El caso $x > y$ es similar.

Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor .$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$ y

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + 2\pi.$$

Demostración, continuación

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \leq \delta$.

Consideremos el caso $x \leq y$. El caso $x > y$ es similar.

Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor .$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$ y

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + 2\pi.$$

Además, como $x \leq y < x + \pi$, tenemos

$$y <$$

Demostración, continuación

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \leq \delta$.

Consideremos el caso $x \leq y$. El caso $x > y$ es similar.

Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor .$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$ y

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + 2\pi.$$

Además, como $x \leq y < x + \pi$, tenemos

$$y < 2k\pi + 3\pi.$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \leq x \leq y < 2k\pi + 3\pi.$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \le x \le y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \qquad u := y - 2k\pi.$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \le x \le y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \qquad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \le t \le u <$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \le x \le y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \qquad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \le t \le u < 3\pi,$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \le x \le y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \qquad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \le t \le u < 3\pi, \qquad |u - t| =$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \le x \le y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \qquad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \le t \le u < 3\pi, \qquad |u - t| = |x - y| <$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \le x \le y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \qquad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \le t \le u < 3\pi, \qquad |u - t| = |x - y| < \delta_2 \le \delta_1.$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \le x \le y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \qquad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \le t \le u < 3\pi, \qquad |u - t| = |x - y| < \delta_2 \le \delta_1.$$

Por la periodicidad de f y por la selección de δ_1,

$$|f(x) - f(y)| =$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \le x \le y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \qquad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \le t \le u < 3\pi, \qquad |u - t| = |x - y| < \delta_2 \le \delta_1.$$

Por la periodicidad de f y por la selección de δ_1,

$$|f(x) - f(y)| = |f(t) - f(u)| \le$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \le x \le y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \qquad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \le t \le u < 3\pi, \qquad |u - t| = |x - y| < \delta_2 \le \delta_1.$$

Por la periodicidad de f y por la selección de δ_1,

$$|f(x) - f(y)| = |f(t) - f(u)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración, final

Hemos demostrado que

$$\omega_f(\delta_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración, final

Hemos demostrado que

$$\omega_f(\delta_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como ω_f es creciente, para cada $\delta > 0$ con $\delta < \delta_2$ tenemos

$$\omega_f(\delta) \leq \omega_f(\delta_2) < \varepsilon.$$

Lema

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Entonces

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, ky} \, \mathrm{d}y.$$

Demostración. Consideremos la integral que define $\widehat{f}_k$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Demostración. Consideremos la integral que define $\widehat{f}_k$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k =$$

Demostración. Consideremos la integral que define $\widehat{f_k}$:

$$\widehat{f_k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f_k} = \frac{1}{2\pi}$$

Demostración. Consideremos la integral que define $\widehat{f}_k$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{2\pi-\pi/k}$$

Demostración. Consideremos la integral que define $\widehat{f}_k$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{2\pi-\pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right)$$

Demostración. Consideremos la integral que define $\widehat{f}_k$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{2\pi-\pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k(y+\pi/k)}$$

Demostración. Consideremos la integral que define $\widehat{f}_k$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{2\pi-\pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k(y+\pi/k)}\, \mathrm{d}y =$$

Demostración. Consideremos la integral que define $\widehat{f}_k$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/k}^{2\pi-\pi/k} f\left(y+\frac{\pi}{k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k(y+\pi/k)}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(y+\frac{\pi}{k}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y.$$

Sumamos la igualdad (1), luego dividimos entre -2.

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(y+\frac{\pi}{k}\right) - f(y)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y.$$

Lema

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}_k = 0.$$

Demostración

Empezamos con la fórmula

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k} \right) - f(y) \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, ky} \, \mathrm{d}y.$$

Demostración

Empezamos con la fórmula

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ky}\, \mathrm{d}y.$$

Acotamos la integral usando ω_f:

$$|\widehat{f}_k| \leq$$

Demostración

Empezamos con la fórmula

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(y+\frac{\pi}{k}\right)-f(y)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y.$$

Acotamos la integral usando ω_f:

$$|\widehat{f}_k| \leq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(y+\frac{\pi}{k}\right)-f(y)\right|\mathrm{d}y \leq$$

Demostración

Empezamos con la fórmula

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(f\left(y+\frac{\pi}{k}\right)-f(y)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y.$$

Acotamos la integral usando ω_f:

$$|\widehat{f}_k| \le \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(y+\frac{\pi}{k}\right)-f(y)\right|\mathrm{d}y \le \frac{1}{2}\omega_f\left(\frac{\pi}{|k|}\right).$$

Demostración

Empezamos con la fórmula

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ky}\, \mathrm{d}y.$$

Acotamos la integral usando ω_f:

$$|\widehat{f}_k| \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right| \mathrm{d}y \leq \frac{1}{2}\omega_f\left(\frac{\pi}{|k|}\right).$$

Como $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, la última expresión tiende a 0 cuando $|k|$ tiende a infinito.

Estamos listos para considerar el caso general de f en el teorema/lema de Riemann–Lebesgue.

Teorema

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}_k = 0.$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$.

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{g}_k = 0$.

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{g}_k = 0$. Encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{g}_k = 0$. Encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \left(|k| \geq m \qquad \Longrightarrow \qquad |\widehat{g}_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Luego para cada k en $\mathbb{Z}$ con $|k| \geq m$ obtenemos

$$|\widehat{f}_k| =$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{g}_k = 0$. Encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \left(|k| \geq m \qquad \Longrightarrow \qquad |\widehat{g}_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Luego para cada k en $\mathbb{Z}$ con $|k| \geq m$ obtenemos

$$|\widehat{f}_k| = |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k + \widehat{g}_k| \leq$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{g}_k = 0$. Encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \left(|k| \geq m \qquad \Longrightarrow \qquad |\widehat{g}_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Luego para cada k en $\mathbb{Z}$ con $|k| \geq m$ obtenemos

$$|\widehat{f}_k| = |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k + \widehat{g}_k| \leq |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k| + |\widehat{g}_k| \leq$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{g}_k = 0$. Encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \left(|k| \geq m \qquad \Longrightarrow \qquad |\widehat{g}_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Luego para cada k en $\mathbb{Z}$ con $|k| \geq m$ obtenemos

$$|\widehat{f}_k| = |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k + \widehat{g}_k| \leq |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k| + |\widehat{g}_k| \leq \|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} + |\widehat{g}_k|$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{g}_k = 0$. Encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \left(|k| \geq m \qquad \Longrightarrow \qquad |\widehat{g}_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Luego para cada k en $\mathbb{Z}$ con $|k| \geq m$ obtenemos

$$|\widehat{f}_k| = |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k + \widehat{g}_k| \leq |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k| + |\widehat{g}_k| \leq \|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} + |\widehat{g}_k| < \varepsilon.$$

Tareas para futuro

Se puede demostrar que si f es suave, entonces $\widehat{f_k}$ tiende a 0 de manera rápida.