El lema de Riemann–Lebesgue para los coeficientes de Fourier

Teorema 1. *Sea* $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. *Entonces*

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}_k = 0. \tag{1}$$

En otras palabras, este teorema nos dice que si $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$. Primero vamos a demostrar este resultado para las funciones continuas 2π-periódicas. Cada función de clase $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es automáticamente uniformemente continua. Para trabajar con las funciones uniformemente continuas, es cómodo usar el concepto del *módulo de continuidad uniforme* o *indicador de continuidad uniforme*.

Definición 2 (indicador de continuidad uniforme)**.** Dada una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos $\omega_f\colon\ ]0,+\infty[\ \to [0,+\infty]$,

$$\omega_f(\delta) \coloneqq \sup\bigl\{|f(x) - f(y)|\colon \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \le \delta\bigr\}.$$

Ejercicio 3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Demostrar que ω_f es creciente: si $0 < \delta_1 < \delta_2$, entonces $\omega(\delta_1) \le \omega(\delta_2)$.

Observación 4. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $x, y \in \mathbb{R}$, entonces la definición de ω_f implica que

$$|f(x) - f(y)| \le \omega_f(|x - y|).$$

Es una manera común de utilizar ω_f.

Proposición 5. *Sea* $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. *Entonces*

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como la restricción de f a $[0, 3\pi]$ es una función continua, es uniformemente continua. Luego existe $\delta_1 > 0$ tal que para cualesquier t, u en $[0, 3\pi]$, tales que $|t - u| \le \delta_1$, se cumple que $|f(t) - f(u)| < \varepsilon/2$. Pongamos

$$\delta_2 \coloneqq \min\{\delta_1, \pi\}.$$

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \le \delta$. Consideremos el caso $x \le y$ (el otro caso es similar). Pongamos

$$k \coloneqq \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor.$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$ y $2k\pi \le x < 2k\pi + 2\pi$. Además, como $x \le y < x + \pi$, tenemos $y < 2k\pi + 3\pi$. Pongamos

$$t \coloneqq x - 2k\pi, \qquad u \coloneqq y - 2k\pi.$$

Luego $0 \le t \le u < 3\pi$ y $|u-t| = |x-y| < \delta_2 \le \delta_1$. Por la periodicidad de f y por la selección de δ_1,

$$|f(x) - f(y)| = |f(t) - f(u)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hemos demostrado que

$$\omega_f(\delta_2) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como ω_f es una función creciente, para cada $\delta > 0$ con $\delta < \delta_2$ tenemos

$$\omega_f(\delta) \le \omega_f(\delta_2) < \varepsilon.$$

Hemos obtenido la relación límite. □

Lema 6. *Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces se tiene* (1).

Demostración. Para cada k en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, consideremos la integral que define $\widehat{f}_k$ y hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/k}^{2\pi-\pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k(y+\pi/k)}\, \mathrm{d}y.$$

La función debajo de la integral es 2π-periódica, por eso podemos integrar sobre $[0, 2\pi[$. Además, usamos la propiedad principal de la función exponencial y la igualdad $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi} = -1$. Obtenemos

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, ky}\, \mathrm{d}y.$$

A esta igualdad le sumamos la igualdad que define $\widehat{f}_k$, luego dividimos entre -2. Obtenemos

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, ky}\, \mathrm{d}y.$$

Acotamos la integral por la integral del valor absoluto, luego aplicamos la definición de ω_f:

$$|\widehat{f}_k| \le \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right| \mathrm{d}y \le \frac{1}{2}\omega_f\left(\frac{\pi}{|k|}\right).$$

Por la Proposición 5, la última expresión tiende a 0 cuando $|k|$ tiende a infinito. □

Demostremos el lema de Riemann-Lebesgue usando la aproximación de funciones integrables por funciones continuas.

Demostración. Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Para cada $\varepsilon > 0$ encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $\|f - g\|_{1,2\pi} < \varepsilon/2$. Luego, aplicando el Lema 6 a g, encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que para cada k en $\mathbb{Z}$ con $|k| \ge m$ se tiene que $|\widehat{g}_k| < \varepsilon/2$. Luego para cada k en $\mathbb{Z}$ con $|k| \ge m$ obtenemos $|\widehat{f}_k| < \varepsilon$. □