

El lema de Riemann–Lebesgue (para las funciones integrables en la recta real)

Ejemplo 1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, y sea $f = 1_{(\alpha, \beta)}$. Entonces

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{e^{-2\pi i \alpha \xi} - e^{-2\pi i \beta \xi}}{2\pi i \xi}, & \xi \neq 0; \\ \beta - \alpha, & \xi = 0. \end{cases}$$

Notemos que $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, esto es, la función \widehat{f} es continua y $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Proposición 2 (sobre la densidad de las funciones simples en $L^1(\mathbb{R})$, repaso). Denotemos por \mathcal{S}_0 al conjunto de todas las funciones de la forma

$$\sum_{k=1}^m c_k 1_{A_k},$$

donde $m \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, A_k es Lebesgue-medible en \mathbb{R} y $\mu(A_k) < +\infty$ para cada k en $\{1, \dots, m\}$. Entonces \mathcal{S}_0 es un subconjunto denso de $L^1(\mathbb{R})$.

Idea de demostración. Este hecho es cierto para cualquier espacio de medida; lo aplicamos para \mathbb{R} con la σ -álgebra de Lebesgue \mathcal{F} y con la medida de Lebesgue μ .

1. Si $B \in \mathcal{F}$ y $\mu(B) < +\infty$, entonces $1_B \in L^1(\mathbb{R})$. Además, $L^1(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial. Por lo tanto, $\mathcal{S}_0 \subseteq L^1(\mathbb{R})$.

2. Queremos demostrar que cualquier función f de la clase $L^1(\mathbb{R})$ se aproxima por las funciones del conjunto \mathcal{S}_0 . Empecemos con el caso cuando f es positiva, esto es, $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu, [0, +\infty))$. Para cada n en \mathbb{N} definimos $g_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ como

$$g_n(x) := \begin{cases} \frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n}, & f(x) < n; \\ n, & f(x) \geq n. \end{cases}$$

Es fácil verificar que $g_n \in \mathcal{S}_0$. Además, se puede probar que para cada x en \mathbb{R} la sucesión $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y tiende a $f(x)$. Por el teorema de la convergencia monótona,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu,$$

esto es, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - f\|_1 = 0$.

3. Consideremos el caso general, $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu, \mathbb{C})$. Entonces podemos escribir f como una combinación lineal de cuatro funciones positivas $h_1 - h_2 + i(h_3 - h_4)$, donde $h_1, h_2, h_3, h_4 \in L^1(\mathbb{R}, \mu, [0, +\infty))$. A cada una de las funciones h_1, h_2, h_3, h_4 aplicamos el resultado del inciso 2, y obtenemos el resultado. \square

Proposición 3 (sobre la densidad de las funciones escalonadas en $L^1(\mathbb{R})$). Denotemos por \mathcal{S}_1 al conjunto de todas las funciones de la forma

$$\sum_{k=1}^m c_k 1_{(\alpha_k, \beta_k)},$$

donde $m \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_k < \beta_k$ para cada k en $\{1, \dots, m\}$. Entonces \mathcal{S}_1 es un subconjunto denso de $L^1(\mathbb{R})$.

Demostración. Vamos a demostrar que $\mathcal{S}_0 \subseteq \text{clos}(\mathcal{S}_1)$. Entonces, debido al Lema 2, tendremos que $\text{clos}(\mathcal{S}_0) = \text{clos}(\mathcal{S}_1) = L^1(\mathbb{R})$.

Primero supongamos que $f = 1_A$, donde $A \in \mathcal{F}$ y $\mu(A) < +\infty$, y sea $\varepsilon > 0$. Usando la propiedad regular de la medida de Lebesgue, encontramos un conjunto B abierto tal que $\mu(A \Delta B) < \varepsilon/2$. Notemos que B se puede representar como una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos. Las longitudes de estos intervalos forman una sucesión que converge a 0. Denotemos por C a la unión de los primeros p intervalos de esta sucesión, donde p está elegido de tal manera que $\mu(B \setminus C) < \varepsilon/2$. Entonces $\mu(A \Delta C) < \varepsilon$. Luego

$$\|1_A - 1_C\|_1 = \mu(A \setminus C) + \mu(C \setminus A) \leq \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus C) + \mu(B \setminus A) < \varepsilon.$$

En general, cada elemento de \mathcal{S}_0 es una combinación lineal finita de la forma

$$f = \sum_{k=1}^m c_k 1_{A_k}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la primera parte de la demostración, para cada k encontramos un conjunto D_k que sea una unión finita disjunta de intervalos abiertos y tal que

$$\|1_{A_k} - 1_{D_k}\|_1 < \frac{1}{m(|c_k| + 1)}.$$

Pongamos $g = \sum_{k=1}^m c_k 1_{D_k}$. Entonces $g \in \mathcal{S}_1$ y $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. □

Teorema 4 (el lema de Riemann–Lebesgue). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos g en \mathcal{S}_1 tal que $\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$. Notamos que para cada ξ en \mathbb{R}

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| \leq \|\mathcal{F}(f - g)\|_\infty \leq \|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como el resultado es cierto para funciones de la clase \mathcal{S}_1 , encontramos $L > 0$ tal que para cada ξ con $|\xi| > L$

$$|\widehat{g}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego para cada ξ en \mathbb{R} con $|\xi| > L$ tenemos

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| < \varepsilon. \quad \square$$