Marcos de Parseval
(un tema de la unidad “Espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

3 de enero de 2023

Plan

Contenido

Esta presentación está basada en un fragmento del libro:

Paulsen, Raghupathi:
An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces.

Objetivos

Estudiar varias definiciones equivalentes de marcos de Parseval.

Objetivos

Estudiar varias definiciones equivalentes de marcos de Parseval.

Mostrar que al aplicar una proyección ortogonal a una base ortonormal se obtiene un marco de Parseval.

Objetivos

Estudiar varias definiciones equivalentes de marcos de Parseval.

Mostrar que al aplicar una proyección ortogonal a una base ortonormal se obtiene un marco de Parseval.

Mostrar que cada marco de Parseval se puede obtener de esta manera, al encajar el espacio de Hilbert original en un espacio más grande.

Prerrequisitos

- Sumas sobre conjuntos infinitos.
- Bases ortonormales en espacios de Hilbert.
- El espacio $\ell^2(J)$, donde J es un conjunto.
- Isometrías lineales entre espacios de Hilbert.
- Proyecciones ortogonales en espacios de Hilbert.

Repaso: isometrías lineales entre espacios de Hilbert

Proposición

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert, $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $V^* V = I_{H_1}$;

(b) $\langle Va, Vb\rangle_{H_2} = \langle a, b\rangle_{H_1}$ para cada a, b en H_1;

(c) $\|Va\|_{H_2} = \|a\|_{H_1}$ para cada a en H_1;

(d) $d_{H_2}(Va, Vb) = d_{H_1}(a, b)$ para cada a, b en H_1.

Repaso: sumas sobre conjuntos finitos o infinitos

En esta presentación J puede ser un conjunto finito o infinito, numerable o no numerable.

Repaso: sumas sobre conjuntos finitos o infinitos

En esta presentación J puede ser un conjunto finito o infinito, numerable o no numerable.

Vamos a usar J como el conjunto de índices de una familia de vectores.

Repaso: sumas sobre conjuntos finitos o infinitos

En esta presentación J puede ser un conjunto finito o infinito, numerable o no numerable.

Vamos a usar J como el conjunto de índices de una familia de vectores.

$\mathcal{P}_{\mathsf{fin}}(J) :=$ la colección de todos los subconjuntos finitos de J.

Repaso: sumas sobre conjuntos finitos o infinitos

En esta presentación J puede ser un conjunto finito o infinito, numerable o no numerable.

Vamos a usar J como el conjunto de índices de una familia de vectores.

$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(J) :=$ la colección de todos los subconjuntos finitos de J.

Definición

Sean E un espacio normado complejo, J un conjunto, $(x_j)_{j\in J} \in E^J$, $y \in E$.
Decimos que la suma $\sum_{j\in J}$ converge al vector y y escribimos $\sum_{j\in J} x_j = y$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists K \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(J) \qquad \forall L \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(J) \qquad \left(K \subseteq L \qquad \Longrightarrow \qquad \left\| \sum_{j\in L} x_j - y \right\| < \varepsilon \right).$$

Plan

Definición: marco de Parseval

Definición

Sean H un espacio de Hilbert, J un conjunto, $(f_j)_{j\in J} \in H^J$ una familia de vectores en H.
Se dice que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H, si para cada h en H

$$\|h\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle h, f_j\rangle|^2.$$

Ejemplo

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H.

Ejemplo

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H.

$$J := \mathbb{N}, \qquad f_j := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} b_k, & j = 2k-1, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} b_k, & j = 2k \end{cases} \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

Ejemplo

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H.

$$J := \mathbb{N}, \qquad f_j := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} b_k, & j = 2k-1, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} b_k, & j = 2k \end{cases} \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_1, \qquad f_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} b_1, \qquad f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_2, \qquad f_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} b_2, \qquad \ldots$$

Ejemplo

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H.

$$J := \mathbb{N}, \qquad f_j := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} b_k, & j = 2k-1, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} b_k, & j = 2k \end{cases} \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_1, \qquad f_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} b_1, \qquad f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_2, \qquad f_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} b_2, \qquad \ldots$$

Entonces para cada h en H

$$\|h\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle h, b_k\rangle|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle h, -b_k\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle h, f_j\rangle|^2.$$

Repaso: el espacio $\ell^2(J)$

$$\ell^2(J) := \left\{ a \in \mathbb{C}^J : \quad \sum_{j \in J} |a_j|^2 \text{ converge} \right\}.$$

Se sabe que $\ell^2(J)$ es un espacio de Hilbert.

Repaso: el espacio $\ell^2(J)$

$$\ell^2(J) := \left\{ a \in \mathbb{C}^J : \quad \sum_{j \in J} |a_j|^2 \text{ converge} \right\}.$$

Se sabe que $\ell^2(J)$ es un espacio de Hilbert.

Para cada k en J, definimos $e_k \colon J \to \mathbb{C}$,

$$e_k(j) := \delta_{j,k}.$$

Repaso: el espacio $\ell^2(J)$

$$\ell^2(J) := \left\{ a \in \mathbb{C}^J : \quad \sum_{j \in J} |a_j|^2 \text{ converge} \right\}.$$

Se sabe que $\ell^2(J)$ es un espacio de Hilbert.

Para cada k en J, definimos $e_k \colon J \to \mathbb{C}$,

$$e_k(j) := \delta_{j,k}.$$

Sabemos que $(e_k)_{k \in J}$ es una base ortonormal de $\ell^2(J)$. Para cada a en $\ell^2(J)$,

$$\sum_{k \in J} a_k e_k = a.$$

Criterio de marco de Parseval

Proposición

Sean H un espacio de Hilbert, J un conjunto, $(f_j)_{j\in J} \in H^J$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval;

(b) existe una isometría lineal $V\colon H \to \ell^2(J)$ tal que

$$(Vh)_j = \langle h, f_j\rangle \qquad (h \in H,\ j \in J);$$

(c) para cada h en H, se tiene que

$$h = \sum_{j\in J} \langle h, f_j\rangle\, f_j.$$

Demostración, partes simples

(a)$\Rightarrow$(b).

Esta implicación se sigue directamente de la definición del marco de Parseval.

Demostración, partes simples

(a)$\Rightarrow$(b).

Esta implicación se sigue directamente de la definición del marco de Parseval.

(c)$\Rightarrow$(a).

Supongamos que se cumple la condición (c).

Demostración, partes simples

(a)$\Rightarrow$(b).

Esta implicación se sigue directamente de la definición del marco de Parseval.

(c)$\Rightarrow$(a).

Supongamos que se cumple la condición (c). Entonces para cada h en H

$$\langle h, h \rangle$$

Demostración, partes simples

(a)$\Rightarrow$(b).

Esta implicación se sigue directamente de la definición del marco de Parseval.

(c)$\Rightarrow$(a).

Supongamos que se cumple la condición (c). Entonces para cada h en H

$$\langle h, h \rangle =$$

Demostración, partes simples

(a)$\Rightarrow$(b).

Esta implicación se sigue directamente de la definición del marco de Parseval.

(c)$\Rightarrow$(a).

Supongamos que se cumple la condición (c). Entonces para cada h en H

$$\langle h, h\rangle = \left\langle \sum_{j\in J} \langle h, f_j\rangle f_j,\ h \right\rangle$$

Demostración, partes simples

(a)$\Rightarrow$(b).

Esta implicación se sigue directamente de la definición del marco de Parseval.

(c)$\Rightarrow$(a).

Supongamos que se cumple la condición (c). Entonces para cada h en H

$$\langle h, h\rangle = \left\langle \sum_{j\in J} \langle h, f_j\rangle f_j,\ \ h \right\rangle =$$

Demostración, partes simples

(a)⇒(b).

Esta implicación se sigue directamente de la definición del marco de Parseval.

(c)⇒(a).

Supongamos que se cumple la condición (c). Entonces para cada h en H

$$\langle h, h\rangle = \left\langle \sum_{j\in J} \langle h, f_j\rangle f_j,\ h \right\rangle = \sum_{j\in J} \langle h, f_j\rangle \langle f_j, h\rangle$$

Demostración, partes simples

(a)⇒(b).

Esta implicación se sigue directamente de la definición del marco de Parseval.

(c)⇒(a).

Supongamos que se cumple la condición (c). Entonces para cada h en H

$$\langle h, h\rangle = \left\langle \sum_{j\in J} \langle h, f_j\rangle f_j,\ h \right\rangle = \sum_{j\in J} \langle h, f_j\rangle \langle f_j, h\rangle =$$

Demostración, partes simples

(a)$\Rightarrow$(b).

Esta implicación se sigue directamente de la definición del marco de Parseval.

(c)$\Rightarrow$(a).

Supongamos que se cumple la condición (c). Entonces para cada h en H

$$\langle h, h \rangle = \left\langle \sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle f_j,\ h \right\rangle = \sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle \langle f_j, h \rangle = \sum_{j \in J} |\langle h, f_j \rangle|^2.$$

Demostración, (b)⇒(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Demostración, (b)⇒(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle$$

Demostración, (b)⇒(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle =$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle$$

Demostración, (b)⇒(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle =$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j$$

Demostración, (b)⇒(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j =$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j = \langle h, f_j \rangle.$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j = \langle h, f_j \rangle.$$

Por eso $V^* e_j = f_j$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j = \langle h, f_j \rangle.$$

Por eso $V^* e_j = f_j$.

Luego para cada h en H,

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j = \langle h, f_j \rangle.$$

Por eso $V^* e_j = f_j$.

Luego para cada h en H,

$$h$$

Demostración, (b)⇒(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j = \langle h, f_j \rangle.$$

Por eso $V^* e_j = f_j$.

Luego para cada h en H,

$$h =$$

Demostración, (b)⇒(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j = \langle h, f_j \rangle.$$

Por eso $V^* e_j = f_j$.

Luego para cada h en H,

$$h = V^* V h$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j = \langle h, f_j \rangle.$$

Por eso $V^* e_j = f_j$.

Luego para cada h en H,

$$h = V^* Vh =$$

Demostración, (b)⇒(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j = \langle h, f_j \rangle.$$

Por eso $V^* e_j = f_j$.

Luego para cada h en H,

$$h = V^* V h = V^* \left(\sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle e_j \right)$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j = \langle h, f_j \rangle.$$

Por eso $V^* e_j = f_j$.

Luego para cada h en H,

$$h = V^* V h = V^* \left(\sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle e_j \right) =$$

Demostración, (b)⇒(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j = \langle h, f_j \rangle.$$

Por eso $V^* e_j = f_j$.

Luego para cada h en H,

$$h = V^* V h = V^* \left(\sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle e_j \right) = \sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle V^* e_j$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j = \langle h, f_j \rangle.$$

Por eso $V^* e_j = f_j$.

Luego para cada h en H,

$$h = V^* V h = V^* \left(\sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle e_j \right) = \sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle V^* e_j =$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c)

Supongamos que existe V como en la condición (b).

Para cada j en J y cada h en H,

$$\langle h, V^* e_j \rangle = \langle Vh, e_j \rangle = (Vh)_j = \langle h, f_j \rangle.$$

Por eso $V^* e_j = f_j$.

Luego para cada h en H,

$$h = V^* V h = V^* \left(\sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle e_j \right) = \sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle V^* e_j = \sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle f_j.$$

Marcos de Parseval y la identidad para el producto interno

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(f_j)_{j\in J}$ un marco de Parseval para H.

Entonces para cada g, h en H,

$$\langle g, h\rangle = \sum_{j\in J} \langle g, f_j\rangle \langle f_j, h\rangle.$$

Demostración

Usamos la isometría V del criterio.

Demostración

Usamos la isometría V del criterio.

V preserva el producto interno.

Demostración

Usamos la isometría V del criterio.

V preserva el producto interno.

Para cada g, h en H,

Demostración

Usamos la isometría V del criterio.

V preserva el producto interno.

Para cada g, h en H,

$$\langle g, h \rangle$$

Demostración

Usamos la isometría V del criterio.

V preserva el producto interno.

Para cada g, h en H,

$$\langle g, h \rangle =$$

Demostración

Usamos la isometría V del criterio.

V preserva el producto interno.

Para cada g, h en H,

$$\langle g, h \rangle = \langle Vg, Vh \rangle$$

Demostración

Usamos la isometría V del criterio.

V preserva el producto interno.

Para cada g, h en H,

$$\langle g, h \rangle = \langle Vg, Vh \rangle =$$

Demostración

Usamos la isometría V del criterio.

V preserva el producto interno.

Para cada g, h en H,

$$\langle g, h \rangle = \langle Vg, Vh \rangle = \sum_{j \in J} (Vg)_j \, \overline{(Vh)_j}$$

Demostración

Usamos la isometría V del criterio.

V preserva el producto interno.

Para cada g, h en H,

$$\langle g, h\rangle = \langle Vg, Vh\rangle = \sum_{j\in J}(Vg)_j\,\overline{(Vh)_j}$$

$$=$$

Demostración

Usamos la isometría V del criterio.

V preserva el producto interno.

Para cada g, h en H,

$$\langle g, h\rangle = \langle Vg, Vh\rangle = \sum_{j\in J}(Vg)_j\,\overline{(Vh)_j}$$

$$= \sum_{j\in J}\langle g, f_j\rangle\overline{\langle h, f_j\rangle}$$

Demostración

Usamos la isometría V del criterio.

V preserva el producto interno.

Para cada g, h en H,

$$\langle g, h\rangle = \langle Vg, Vh\rangle = \sum_{j\in J}(Vg)_j\,\overline{(Vh)_j}$$

$$= \sum_{j\in J}\langle g, f_j\rangle\overline{\langle h, f_j\rangle} =$$

Demostración

Usamos la isometría V del criterio.

V preserva el producto interno.

Para cada g, h en H,

$$\begin{aligned}\langle g, h\rangle = \langle Vg, Vh\rangle &= \sum_{j\in J}(Vg)_j\,\overline{(Vh)_j}\\ &= \sum_{j\in J}\langle g, f_j\rangle\overline{\langle h, f_j\rangle} = \sum_{j\in J}\langle g, f_j\rangle\langle f_j, h\rangle.\end{aligned}$$

Un caso especial cuando un marco de Parseval es una base ortonormal

Ejercicio. Supongamos que H es un espacio de Hilbert de dimensión n
y $(f_1, \ldots, f_n)$ es un marco de Parseval para H.
Demostrar que $(f_1, \ldots, f_n)$ es una base ortonormal de H.

Plan

Repaso: proyección ortogonal

Sean L un espacio de Hilbert y H un subespacio cerrado de L.

Repaso: proyección ortogonal

Sean L un espacio de Hilbert y H un subespacio cerrado de L.

Entonces existe un único operador $P \in \mathcal{B}(L)$ tal que

$$P^2 = P, \qquad P^* = P, \qquad P[L] = H.$$

Repaso: proyección ortogonal

Sean L un espacio de Hilbert y H un subespacio cerrado de L.

Entonces existe un único operador $P \in \mathcal{B}(L)$ tal que

$$P^2 = P, \qquad P^* = P, \qquad P[L] = H.$$

Este operador P se llama la proyección ortogonal sobre H.

Una base ortonormal y una proyección ortogonal dan un marco de Parseval

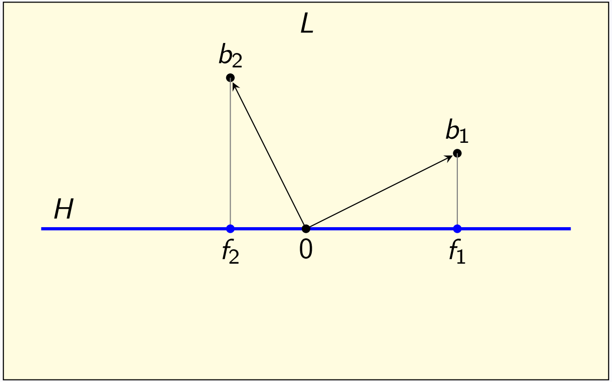
Proposición

Sean L un espacio de Hilbert, $(b_j)_{j\in J}$ una base ortonormal de L,
H un subespacio cerrado de L y $P \in \mathcal{B}(L)$ la proyección ortogonal tal que $P[L] = H$.
Entonces

$$(Pb_j)_{j\in J}$$

es un marco de Parseval para H.

El dibujo corresponde a los espacios reales, con $\dim(L) = 2$ y $\dim(H) = 1$.



Demostración

Sea $v \in H$. Entonces $v = Pv$ y para cada j en J

$$\langle v, b_j \rangle = \langle Pv, b_j \rangle = \langle v, Pb_j \rangle.$$

Aplicamos la identidad de Parseval:

$$\|v\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle v, b_j \rangle|^2 = \sum_{j \in J} |\langle v, Pb_j \rangle|^2.$$

Repaso: la proyección ortogonal asociada a una isometría lineal

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $V \colon H_1 \to H_2$ una isometría lineal:

$$V^* V = I_{H_1}.$$

Repaso: la proyección ortogonal asociada a una isometría lineal

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $V\colon H_1 \to H_2$ una isometría lineal:

$$V^* V = I_{H_1}.$$

Pongamos

$$P := VV^*.$$

Repaso: la proyección ortogonal asociada a una isometría lineal

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $V\colon H_1 \to H_2$ una isometría lineal:

$$V^* V = I_{H_1}.$$

Pongamos

$$P := VV^*.$$

Entonces

$$P^2 = P, \qquad P^* = P, \qquad P[H_2] = V[H_1].$$

Repaso: la proyección ortogonal asociada a una isometría lineal

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $V\colon H_1 \to H_2$ una isometría lineal:

$$V^* V = I_{H_1}.$$

Pongamos

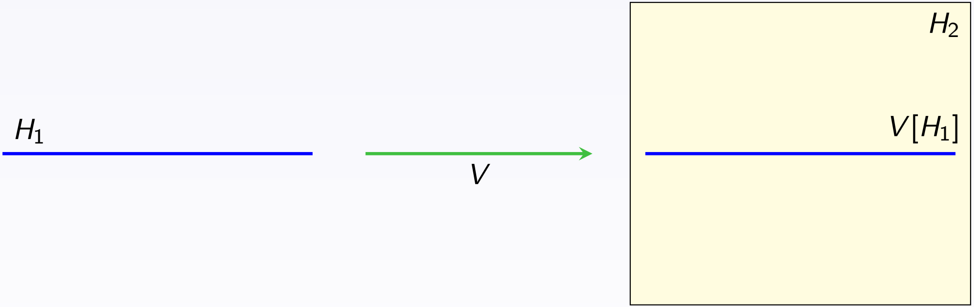
$$P := VV^*.$$

Entonces

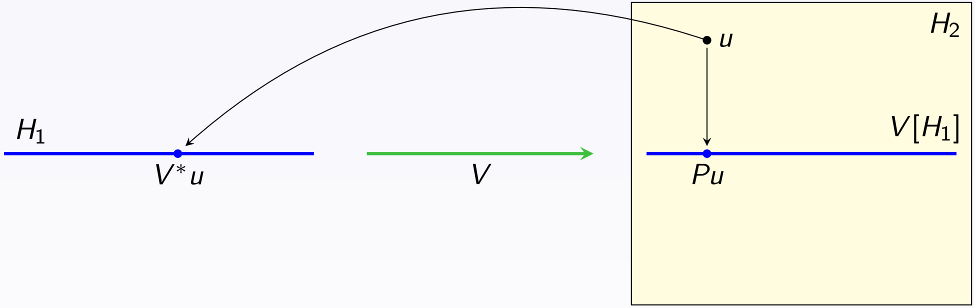
$$P^2 = P, \qquad P^* = P, \qquad P[H_2] = V[H_1].$$

Notemos que $V[H_1]$ es cerrado en H_2.

La proyección ortogonal asociada a una isometría lineal



La proyección ortogonal asociada a una isometría lineal



Cada marco de Parseval se puede obtener de una base ortonormal y una proyección ortogonal

Proposición (Larsen)

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(f_s)_{s\in S}$ un marco de Parseval en H.
Entonces existen un espacio de Hilbert L, una isometría lineal $V\colon H \to L$ y una base ortonormal $(b_j)_{j\in J}$ de L tales que para cada j en J

$$Vf_j = Pb_j, \qquad f_j = V^* b_j,$$

donde $P = VV^*$.
Además, $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Demostración, inicio

Sea $V\colon H \to \ell^2(J)$ la isometría del criterio de marco de Parseval.

Demostración, inicio

Sea $V\colon H \to \ell^2(J)$ la isometría del criterio de marco de Parseval.

Pongamos $L := \ell^2(J)$, $b_j := e_j$.

Demostración, inicio

Sea $V\colon H \to \ell^2(J)$ la isometría del criterio de marco de Parseval.

Pongamos $L \coloneqq \ell^2(J)$, $b_j \coloneqq e_j$.

Pongamos $P \coloneqq VV^*$. Entonces P es una proyección ortogonal y $P[\ell^2(S)] = V[H]$.

Demostración, inicio

Sea $V\colon H \to \ell^2(J)$ la isometría del criterio de marco de Parseval.

Pongamos $L := \ell^2(J)$, $b_j := e_j$.

Pongamos $P := VV^*$. Entonces P es una proyección ortogonal y $P[\ell^2(S)] = V[H]$.

Ya vimos en la demostración del criterio que

$$f_j = V^* e_j.$$

Demostración, inicio

Sea $V\colon H \to \ell^2(J)$ la isometría del criterio de marco de Parseval.

Pongamos $L := \ell^2(J)$, $b_j := e_j$.

Pongamos $P := VV^*$. Entonces P es una proyección ortogonal y $P[\ell^2(S)] = V[H]$.

Ya vimos en la demostración del criterio que

$$f_j = V^* e_j.$$

Por lo tanto,

Demostración, inicio

Sea $V\colon H \to \ell^2(J)$ la isometría del criterio de marco de Parseval.

Pongamos $L := \ell^2(J)$, $b_j := e_j$.

Pongamos $P := VV^*$. Entonces P es una proyección ortogonal y $P[\ell^2(S)] = V[H]$.

Ya vimos en la demostración del criterio que

$$f_j = V^* e_j.$$

Por lo tanto,

$$Pe_j$$

Demostración, inicio

Sea $V\colon H \to \ell^2(J)$ la isometría del criterio de marco de Parseval.

Pongamos $L := \ell^2(J)$, $b_j := e_j$.

Pongamos $P := VV^*$. Entonces P es una proyección ortogonal y $P[\ell^2(S)] = V[H]$.

Ya vimos en la demostración del criterio que

$$f_j = V^* e_j.$$

Por lo tanto,

$$Pe_j =$$

Demostración, inicio

Sea $V: H \to \ell^2(J)$ la isometría del criterio de marco de Parseval.

Pongamos $L := \ell^2(J)$, $b_j := e_j$.

Pongamos $P := VV^*$. Entonces P es una proyección ortogonal y $P[\ell^2(S)] = V[H]$.

Ya vimos en la demostración del criterio que

$$f_j = V^* e_j.$$

Por lo tanto,

$$Pe_j = VV^* e_j$$

Demostración, inicio

Sea $V\colon H \to \ell^2(J)$ la isometría del criterio de marco de Parseval.

Pongamos $L := \ell^2(J)$, $b_j := e_j$.

Pongamos $P := VV^*$. Entonces P es una proyección ortogonal y $P[\ell^2(S)] = V[H]$.

Ya vimos en la demostración del criterio que

$$f_j = V^* e_j.$$

Por lo tanto,

$$Pe_j = VV^* e_j =$$

Demostración, inicio

Sea $V\colon H \to \ell^2(J)$ la isometría del criterio de marco de Parseval.

Pongamos $L := \ell^2(J)$, $b_j := e_j$.

Pongamos $P := VV^*$. Entonces P es una proyección ortogonal y $P[\ell^2(S)] = V[H]$.

Ya vimos en la demostración del criterio que

$$f_j = V^* e_j.$$

Por lo tanto,

$$Pe_j = VV^* e_j = Vf_j.$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j \in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$.

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h := V^*g$.

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j \in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h := V^* g$. Entonces

$$g$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h := V^* g$. Entonces

$$g =$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h := V^*g$. Entonces

$$g = Pg$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h \coloneqq V^* g$. Entonces

$$g = Pg =$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h := V^* g$. Entonces

$$g = Pg = VV^* g$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h \coloneqq V^* g$. Entonces

$$g = Pg = VV^* g =$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h := V^*g$. Entonces

$$g = Pg = VV^*g = Vh.$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h \coloneqq V^*g$. Entonces

$$g = Pg = VV^*g = Vh.$$

Usamos el hecho que V es una isometría y que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H:

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h \coloneqq V^* g$. Entonces

$$g = Pg = VV^* g = Vh.$$

Usamos el hecho que V es una isometría y que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H:

$$\|g\|_L^2$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h := V^*g$. Entonces

$$g = Pg = VV^*g = Vh.$$

Usamos el hecho que V es una isometría y que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H:

$$\|g\|_L^2 =$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h \coloneqq V^* g$. Entonces

$$g = Pg = VV^*g = Vh.$$

Usamos el hecho que V es una isometría y que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H:

$$\|g\|_L^2 = \|Vh\|_L^2$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h := V^*g$. Entonces

$$g = Pg = VV^*g = Vh.$$

Usamos el hecho que V es una isometría y que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H:

$$\|g\|_L^2 = \|Vh\|_L^2 =$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h \coloneqq V^*g$. Entonces

$$g = Pg = VV^*g = Vh.$$

Usamos el hecho que V es una isometría y que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H:

$$\|g\|_L^2 = \|Vh\|_L^2 = \|h\|_H^2$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h \coloneqq V^* g$. Entonces

$$g = Pg = VV^* g = Vh.$$

Usamos el hecho que V es una isometría y que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H:

$$\|g\|_L^2 = \|Vh\|_L^2 = \|h\|_H^2 =$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h \coloneqq V^*g$. Entonces

$$g = Pg = VV^*g = Vh.$$

Usamos el hecho que V es una isometría y que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H:

$$\|g\|_L^2 = \|Vh\|_L^2 = \|h\|_H^2 = \sum_{j\in J} |\langle h, f_j\rangle_H|^2$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h \coloneqq V^*g$. Entonces

$$g = Pg = VV^*g = Vh.$$

Usamos el hecho que V es una isometría y que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H:

$$\|g\|_L^2 = \|Vh\|_L^2 = \|h\|_H^2 = \sum_{j\in J} |\langle h, f_j\rangle_H|^2 =$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h \coloneqq V^*g$. Entonces

$$g = Pg = VV^*g = Vh.$$

Usamos el hecho que V es una isometría y que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H:

$$\|g\|_L^2 = \|Vh\|_L^2 = \|h\|_H^2 = \sum_{j\in J} |\langle h, f_j\rangle_H|^2 = \sum_{j\in J} |\langle Vh, Vf_j\rangle_L|^2$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h := V^*g$. Entonces

$$g = Pg = VV^*g = Vh.$$

Usamos el hecho que V es una isometría y que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H:

$$\|g\|_L^2 = \|Vh\|_L^2 = \|h\|_H^2 = \sum_{j\in J} |\langle h, f_j\rangle_H|^2 = \sum_{j\in J} |\langle Vh, Vf_j\rangle_L|^2 =$$

Demostración, final

Mostremos que $(Vf_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para $V[H]$.

Sea $g \in V[H]$. Pongamos $h := V^* g$. Entonces

$$g = Pg = VV^* g = Vh.$$

Usamos el hecho que V es una isometría y que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H:

$$\|g\|_L^2 = \|Vh\|_L^2 = \|h\|_H^2 = \sum_{j\in J} |\langle h, f_j\rangle_H|^2 = \sum_{j\in J} |\langle Vh, Vf_j\rangle_L|^2 = \sum_{j\in J} |\langle g, Vf_j\rangle_L|^2.$$