La serie de Neumann
(un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

6 de mayo de 2022

Objetivo

Sea X un espacio de Banach. Ya sabemos que $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach con identidad.

Objetivo

Sea X un espacio de Banach. Ya sabemos que $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach con identidad.

Denotemos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ el conjunto de los operadores invertibles en X:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \Big\{ T \in \mathcal{B}(X) : \quad \exists S \in \mathcal{B}(X) \quad TS = ST = I \Big\}.$$

Objetivo

Sea X un espacio de Banach. Ya sabemos que $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach con identidad.

Denotemos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ el conjunto de los operadores invertibles en X:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \Big\{ T \in \mathcal{B}(X) \colon \quad \exists S \in \mathcal{B}(X) \quad TS = ST = I \Big\}.$$

Vamos a demostrar el siguiente resultado, llamado en honor de Carl Gottfried Neumann.

Objetivo

Sea X un espacio de Banach. Ya sabemos que $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach con identidad.

Denotemos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ el conjunto de los operadores invertibles en X:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \Big\{ T \in \mathcal{B}(X) : \quad \exists S \in \mathcal{B}(X) \quad TS = ST = I \Big\}.$$

Vamos a demostrar el siguiente resultado, llamado en honor de Carl Gottfried Neumann.

Teorema

Sea X un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| < 1$.
Entonces $I - T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge en $\mathcal{B}(X)$, y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Prerrequisitos

- Espacios de Banach, la convergencia absoluta de series.
- El álgebra de Banach $\mathcal{B}(X)$ de los operadores lineales acotados en el espacio de Banach X.
- Continuidad de la multiplicación de operadores.
- La suma de la progresión geométrica.

Series en espacio de Banach que convergen de manera absoluta (repaso)

Proposición

Sea V un espacio de Banach y sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\| < +\infty.$$

Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge en V, esto es, existe w en V tal que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{m} u_k - w \right\| = 0.$$

Más aún,

$$\|w\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|.$$

El álgebra de los operadores lineales acotados (repaso)

Definición (álgebra de Banach con identidad)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja asociativa y al mismo tiempo un espacio de Banach.

Supongamos que la norma es submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\| \le \|a\| \, \|b\|.$$

Además, supongamos que $\mathcal{A}$ tiene un elemento neutro e y $\|e\| = 1$.

Entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad.

El álgebra de los operadores lineales acotados (repaso)

Definición (álgebra de Banach con identidad)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja asociativa y al mismo tiempo un espacio de Banach.

Supongamos que la norma es submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|.$$

Además, supongamos que $\mathcal{A}$ tiene un elemento neutro e y $\|e\| = 1$.

Entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad.

Proposición

Sea X un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach.

Operadores invertibles (repaso)

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Operadores invertibles (repaso)

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Denotamos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{B}(X)$:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \Big\{ S \in \mathcal{B}(X) \colon \quad \exists T \in \mathcal{B}(X) \quad ST = I \quad \wedge \quad TS = I \Big\}.$$

Operadores invertibles (repaso)

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Denotamos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{B}(X)$:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \Big\{ S \in \mathcal{B}(X) \colon \quad \exists T \in \mathcal{B}(X) \quad ST = I \quad \wedge \quad TS = I \Big\}.$$

Proposición

$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es un grupo.

La serie de Neumann

Teorema

Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| < 1$.

Entonces $I - T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge, y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Demostración, inicio

Por la propiedad submultiplicativa de la norma en $\mathcal{B}(X)$, para cada k en $\mathbb{N}$ se cumple

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k.$$

Demostración, inicio

Por la propiedad submultiplicativa de la norma en $\mathcal{B}(X)$, para cada k en $\mathbb{N}$ se cumple

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k.$$

Ahora la condición $\|T\| < 1$ implica que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| < +\infty.$$

Demostración, inicio

Por la propiedad submultiplicativa de la norma en $\mathcal{B}(X)$, para cada k en $\mathbb{N}$ se cumple

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k.$$

Ahora la condición $\|T\| < 1$ implica que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| < +\infty.$$

Como el espacio normado $\mathcal{B}(X)$ es completo, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge.

Demostración, inicio

Por la propiedad submultiplicativa de la norma en $\mathcal{B}(X)$, para cada k en $\mathbb{N}$ se cumple

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k.$$

Ahora la condición $\|T\| < 1$ implica que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| < +\infty.$$

Como el espacio normado $\mathcal{B}(X)$ es completo, la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k$ converge.

También notamos que $\lim\limits_{k\to\infty} T^k = 0_{\mathcal{B}(X)}$.

Demostración, continuación

Dado m en $\mathbb{N}_0$, denotemos por S_m la suma parcial

$$S_m := \sum_{k=0}^{m} T^k.$$

Demostración, continuación

Dado m en $\mathbb{N}_0$, denotemos por S_m la suma parcial

$$S_m := \sum_{k=0}^{m} T^k.$$

Denotemos por U la suma de la serie:

$$U := \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Demostración, continuación

Dado m en $\mathbb{N}_0$, denotemos por S_m la suma parcial

$$S_m := \sum_{k=0}^{m} T^k.$$

Denotemos por U la suma de la serie:

$$U := \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

En otras palabras,

$$U =$$

Demostración, continuación

Dado m en $\mathbb{N}_0$, denotemos por S_m la suma parcial

$$S_m := \sum_{k=0}^{m} T^k.$$

Denotemos por U la suma de la serie:

$$U := \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

En otras palabras,

$$U = \lim_{m\to\infty} S_m.$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m =$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m =$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - T\sum_{k=0}^{m} T^k$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - T\sum_{k=0}^{m} T^k =$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - T\sum_{k=0}^{m} T^k = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1}$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - T\sum_{k=0}^{m} T^k = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1}$$

$$=$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - T\sum_{k=0}^{m} T^k = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m+1} T^k$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - T\sum_{k=0}^{m} T^k = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m+1} T^k =$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - T\sum_{k=0}^{m} T^k = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m+1} T^k = I + \sum_{k=1}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m} T^k - T^{m+1}$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - T\sum_{k=0}^{m} T^k = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m+1} T^k = I + \sum_{k=1}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m} T^k - T^{m+1} =$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - T\sum_{k=0}^{m} T^k = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m+1} T^k = I + \sum_{k=1}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m} T^k - T^{m+1} = I - T^{m+1}.$$

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - T\sum_{k=0}^{m} T^k = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m+1} T^k = I + \sum_{k=1}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m} T^k - T^{m+1} = I - T^{m+1}.$$

De manera similar, $S_m(I - T) = I - T^{m+1}$.

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - T\sum_{k=0}^{m} T^k = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m+1} T^k = I + \sum_{k=1}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m} T^k - T^{m+1} = I - T^{m+1}.$$

De manera similar, $S_m(I - T) = I - T^{m+1}$.

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$ y aplicamos la continuidad de multiplicación.

Demostración, final

$$(I - T)S_m = S_m - T\,S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - T\sum_{k=0}^{m} T^k = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m+1} T^k = I + \sum_{k=1}^{m} T^k - \sum_{k=1}^{m} T^k - T^{m+1} = I - T^{m+1}.$$

De manera similar, $S_m(I - T) = I - T^{m+1}$.

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$ y aplicamos la continuidad de multiplicación.

$$(I - T)U = I, \qquad U(I - T) = I.$$

Ejercicio.

Supongamos que $T \in \mathcal{B}(X)$, $\|T\| < 1$. Demostrar que

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}, \qquad \|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}.$$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo

Invertir $I - T$ equivale a resolver la ecuación

$$(I - T)x = y.$$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo

Invertir $I - T$ equivale a resolver la ecuación

$$(I - T)x = y.$$

Otra forma equivalente de la misma ecuación: $\quad x = y + Tx.$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo

Invertir $I - T$ equivale a resolver la ecuación

$$(I - T)x = y.$$

Otra forma equivalente de la misma ecuación: $\quad x = y + Tx.$

Definimos $f\colon X \to X$,

$$f(x) := y + Tx.$$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo

Invertir $I - T$ equivale a resolver la ecuación

$$(I - T)x = y.$$

Otra forma equivalente de la misma ecuación: $x = y + Tx$.

Definimos $f\colon X \to X$,

$$f(x) := y + Tx.$$

Como $\|T\| < 1$, la función f es contractiva:

$$\|f(a) - f(b)\|_X =$$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo

Invertir $I - T$ equivale a resolver la ecuación

$$(I - T)x = y.$$

Otra forma equivalente de la misma ecuación: $\quad x = y + Tx.$

Definimos $f\colon X \to X$,

$$f(x) := y + Tx.$$

Como $\|T\| < 1$, la función f es contractiva:

$$\|f(a) - f(b)\|_X = \|T(a - b)\|_X \leq \|T\|\,\|a - b\|_X.$$

La ecuación $(I - T)x = y$ es equivalente a la ecuación $x = f(x)$.

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo, final

$f(x) \coloneqq y + Tx$. Notemos que

$$f(0_X) =$$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo, final

$f(x) \coloneqq y + Tx$. Notemos que

$$f(0_X) = y,$$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo, final

$f(x) := y + Tx$. Notemos que

$$f(0_X) = y, \qquad f(f(0_X)) =$$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo, final

$f(x) \coloneqq y + Tx$. Notemos que

$$f(0_X) = y, \qquad f(f(0_X)) = y + Ty,$$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo, final

$f(x) \coloneqq y + Tx$. Notemos que

$$f(0_X) = y, \qquad f(f(0_X)) = y + Ty, \qquad f(f(f(0_X))) =$$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo, final

$f(x) \coloneqq y + Tx$. Notemos que

$$f(0_X) = y, \qquad f(f(0_X)) = y + Ty, \qquad f(f(f(0_X))) = y + Ty + T^2 y.$$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo, final

$f(x) := y + Tx$. Notemos que

$$f(0_X) = y, \qquad f(f(0_X)) = y + Ty, \qquad f(f(f(0_X))) = y + Ty + T^2 y.$$

En general,

$$f^{[m]}(0_X) =$$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo, final

$f(x) := y + Tx$. Notemos que

$$f(0_X) = y, \qquad f(f(0_X)) = y + Ty, \qquad f(f(f(0_X))) = y + Ty + T^2 y.$$

En general,

$$f^{[m]}(0_X) = \sum_{k=0}^{m-1} T^k y.$$

La serie de Neumann y el teorema del punto fijo, final

$f(x) := y + Tx$. Notemos que

$$f(0_X) = y, \qquad f(f(0_X)) = y + Ty, \qquad f(f(f(0_X))) = y + Ty + T^2 y.$$

En general,

$$f^{[m]}(0_X) = \sum_{k=0}^{m-1} T^k y.$$

Por el teorema del punto fijo, la solución de $x = f(x)$ se puede calcular como

$$x = \lim_{m\to\infty} f^{[m]}(0_X) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k y.$$