La serie de Neumann
(en álgebras de Banach con identidad)

En este tema suponemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad e.

Objetivos. Estudiar la serie de Carl Neumann

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k,$$

donde a es un elemento de $\mathcal{A}$ tal que $\|a\| < 1$.

Prerrequisitos. Álgebras de Banach, álgebras de Banach con identidad, la continuidad de la operación de multiplicación, la convergencia absoluta de una serie en un espacio de Banach implica la convergencia, la suma de la progresión geométrica.

1 Definición. Denotamos por $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ al conjunto de todos los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \coloneqq \big\{a \in \mathcal{A}\colon \quad \exists b \in \mathcal{A} \quad ab = e \quad \wedge \quad ba = e\big\}.$$

2 Proposición (la suma de la progresión geométrica finita, repaso)**.** *Sea $q \in \mathbb{C}$ tal que $q \neq 1$. Entonces, para cada m en $\mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{m-1} q^k = \frac{1-q^m}{1-q}. \tag{1}$$

Demostración. Demostración: ejercicio. □

3 Proposición (la suma de la progresión geométrica infinita, repaso)**.** *Sea $q \in \mathbb{C}$ tal que $|q| < 1$. Entonces,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Demostración. Pasar al límite cuando $m \to \infty$ en la igualdad (1). □

El siguiente resultado es la fórmula para la suma de la progresión geométrica, pero en el contexto de elementos de un álgebra de Banach con identidad.

4 Teorema (sobre la serie de Carl Neumann, en un álgebra de Banach con identidad)**.** *Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $\|a\| < 1$. Entonces, $e - a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ y*

$$(e-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k. \tag{2}$$

Más aún,

$$\|(e-a)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|a\|} \tag{3}$$

y

$$\|(e-a)^{-1} - e\| \leq \frac{\|a\|}{1-\|a\|}. \tag{4}$$

Demostración. 1. Para cada m en $\mathbb{N}_0$, definimos s_m como

$$s_m \coloneqq \sum_{k=0}^{m} e^k.$$

La condición $\|a\| < 1$ implica que $\|a^k\| \leq \|a\|^k$, y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a\|^k = \frac{1}{1-\|a\|} < +\infty.$$

Como el espacio normado $\mathcal{A}$ es completo, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ converge. Denotemos su suma por u:

$$u \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a^k, \quad \text{esto es,} \quad u = \lim_{m\to\infty} s_m.$$

2. Acotamos la norma de u:

$$\|u\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a\|^k = \frac{1}{1-\|a\|}.$$

3. Vamos a demostrar que u es elemento inverso de $e - a$. Notamos que

$$(e-a)s_m = \sum_{k=0}^{m} a^k - \sum_{k=0}^{m} a^{k+1} = \sum_{k=0}^{m} a^k - \sum_{k=1}^{m+1} a^k = e - a^{m+1}.$$

De manera similar,

$$s_m(e-a) = \sum_{k=0}^{m} a^k - \sum_{k=0}^{m} e^{k+1} = \sum_{k=0}^{m} a^k - \sum_{k=1}^{m+1} a^k = e - a^{m+1}.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$. La multiplicación en $\mathcal{A}$ es una función continua, por eso $(e-a)s_m \to (e-a)u$. Por otro lado, $a^{m+1} \to 0_{\mathcal{A}}$. Concluimos que

$$(e-a)u = e, \qquad u(e-a) = e.$$

Hemos demostrado que $e - a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ y se cumplen (2) y (3).

4. Para demostrar (4), notamos que

$$(e-a)^{-1}(e-a) = e$$

y luego

$$(e-a)^{-1} - e = (e-a)^{-1}a.$$

Finalmente, aplicamos la propiedad submultiplicativa de la norma y la cota superior (3):

$$\|(e-a)^{-1} - e\| \leq \|(e-a)^{-1}\|\,\|a\| \leq \frac{\|a\|}{1-\|a\|}.$$ □