Desigualdad de Minkowski

Objetivos. Demostrar la desigualdad Minkowski.

Requisitos. Desigualdad de Hölder, la integral de Lebesgue, propiedad monótona de la integral de Lebesgue.

Aplicaciones. Justificar la definición de los espacios L^p.

Repaso de herramientas auxiliares

1 Teorema (desigualdad de Hölder para funciones reales o complejas, repaso)**.** *Sean* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida,* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ *y* $p, q > 1$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Entonces*

$$\int_X |f|\,|g|\,d\mu \le \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}. \tag{1}$$

2 Proposición (desigualdad para la p-ésima potencia de la suma)**.** *Sean* $p \in [1, +\infty)$, $a, b \ge 0$*. Entonces*

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{2}$$

Demostración. La función $\varphi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, definida como $\varphi(t) \coloneqq t^p$, es convexa. Luego

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \le \frac{a^p}{2} + b^p 2.$$

Al multiplicar ambos lados por 2^p, obtenemos (2). □

Desigualdad de Minkowski

3 Lema. *Sean* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida,* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ *y* $p \in [1, +\infty)$*. Supongamos que*

$$\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu < +\infty, \qquad \int_X |g|^p\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces

$$\int_X |f+g|^p\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Demostración. Para cada x en X aplicamos la desigualdad del triángulo y la desigualdad (2):

$$|f(x)+g(x)|^p \le (|f(x)|+|g(x)|)^p \le 2^{p-1}(|f(x)|+|g(x)|)^p.$$

Al integrar, obtenemos

$$\int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \le 2^{p-1}\left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_X |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right) < +\infty. \qquad \square$$

4 Ejercicio. Demuestre el Lema 3 de otra manera. Sea

$$Y \coloneqq \{x \in X\colon\ |f(x)| \ge |g(x)|\}.$$

Para todo x en Y acote $|f(x)+g(x)|$ por $2|f(x)|$:

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)|+|g(x)| \le 2|f(x)|,$$

y para todo x en $X \setminus Y$ acote $|f(x)+g(x)|$ por $2|g(x)|$.

5 Teorema (desigualdad de Minkowski)**.** *Sean* $(X,\mathcal{F},\mu)$ *un espacio de medida,* $f,g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})$ *y* $p \in [1,+\infty)$*. Entonces*

$$\left(\int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}. \tag{3}$$

Demostración. En el caso $p=1$ la demostración es muy simple:

$$\int_X |f+g| \,\mathrm{d}\mu \le \int_X (|f|+|g|) \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \,\mathrm{d}\mu.$$

Sea $p>1$. Si al menos uno de los sumandos en el lado derecho de (3) es infinito, entonces la desigualdad se cumple. Supongamos que ambos sumandos son finitos. Por el Lema 3, vemos que la función $|f+g|^p$ es integrable.

Si $\int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = 0$, entonces la desigualdad es obvia. Suponemos que $\int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu > 0$. Escribimos $|f+g|^p$ en forma

$$|f+g|^p = |f+g|\,|f+g|^{p-1} \le |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1},$$

luego integramos ambos lados y aplicamos la desigualdad de Hölder:

$$\int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \le \left(\left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\right)\left(\int_X |f+g|^{q(p-1)} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}. \tag{4}$$

De la condición $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ se sigue que $q(p-1)=p$. Dividimos ambos lados de (4) entre $\left(\int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$ y notamos que $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$. $\square$