Desigualdad de Márkov–Chebyshov
(un tema de análisis real)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

10 de junio de 2024

Objetivos:

- demostrar la desigualdad de Márkov
  (también conocida como la desigualdad de Chebyshov),
- conocer algunas de sus aplicaciones.

Objetivos:

- demostrar la desigualdad de Márkov
  (también conocida como la desigualdad de Chebyshov),
- conocer algunas de sus aplicaciones.

Prerrequisitos:

- Propiedades de la integral de funciones medibles positivas.

Monotonía de la integral respecto a la función

(repaso)

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que

$$\forall x \in X \qquad f(x) \leq g(x).$$

Entonces,

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Pasar de la integral sobre un conjunto a la integral sobre todo el espacio

(repaso)

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y $A \in \mathcal{F}$. Entonces,

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X 1_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Monotonía de la integral sobre un conjunto fijo respecto a la función

(repaso)

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $A \in \mathcal{F}$ tales que

$$\forall x \in A \qquad f(x) \leq g(x).$$

Entonces,

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A g \, \mathrm{d}\mu.$$

Monotonía de la integral sobre un conjunto fijo respecto a la función

(repaso)

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $A \in \mathcal{F}$ tales que

$$\forall x \in A \qquad f(x) \leq g(x).$$

Entonces,

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A g \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración:

Monotonía de la integral sobre un conjunto fijo respecto a la función (repaso)

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $A \in \mathcal{F}$ tales que

$$\forall x \in A \qquad f(x) \leq g(x).$$

Entonces,

$$\int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_A g \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración:

$$1_A f \leq 1_A g.$$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

(repaso)

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $A \in \mathcal{F}$, $v \in [0, +\infty)$ tales que

$$\forall x \in A \qquad f(x) = v.$$

Entonces,

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = v \, \mu(A).$$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

(repaso)

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $A \in \mathcal{F}$, $v \in [0, +\infty)$ tales que

$$\forall x \in A \qquad f(x) = v.$$

Entonces,

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = v\,\mu(A).$$

Idea de la demostración:

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

(repaso)

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $A \in \mathcal{F}$, $v \in [0, +\infty)$ tales que

$$\forall x \in A \qquad f(x) = v.$$

Entonces,

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = v \, \mu(A).$$

Idea de la demostración:

$$1_A f$$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

(repaso)

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $A \in \mathcal{F}$, $v \in [0, +\infty)$ tales que

$$\forall x \in A \qquad f(x) = v.$$

Entonces,

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = v \, \mu(A).$$

Idea de la demostración:

$$1_A f =$$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

(repaso)

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $A \in \mathcal{F}$, $v \in [0, +\infty)$ tales que

$$\forall x \in A \qquad f(x) = v.$$

Entonces,

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = v \, \mu(A).$$

Idea de la demostración:

$$1_A f = v \, 1_A.$$

Ejercicio introductorio

Supongamos que 25 palomas están distribuidas de alguna manera en cajones.

¿Cuántos cajones tienen al menos 4 palomas?

Ejercicio introductorio

Supongamos que 25 palomas están distribuidas de alguna manera en cajones.

¿Cuántos cajones tienen al menos 4 palomas?

Respuesta: no más de 6.

Desigualdad de Márkov

Teorema

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $v > 0$. Entonces,

$$\mu\Big(\{x \in X \colon\ f(x) \geq v\}\Big) \leq \frac{1}{v} \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Primera demostración

$$G(f, v) := \left\{x \in X : \; f(x) \geq v\right\}.$$

Primera demostración

$$G(f, v) := \left\{ x \in X :\ \ f(x) \geq v \right\}.$$

Tenemos las siguientes desigualdades:

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu$$

Primera demostración

$$G(f, v) \coloneqq \left\{x \in X : \; f(x) \geq v\right\}.$$

Tenemos las siguientes desigualdades:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq$$

Primera demostración

$$G(f, v) \coloneqq \Big\{ x \in X : \; f(x) \geq v \Big\}.$$

Tenemos las siguientes desigualdades:

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int\limits_{G(f,v)} f \,\mathrm{d}\mu$$

Primera demostración

$$G(f, v) := \Big\{ x \in X : \ f(x) \geq v \Big\}.$$

Tenemos las siguientes desigualdades:

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int\limits_{G(f,v)} f \, \mathrm{d}\mu \geq$$

Primera demostración

$$G(f,v) := \left\{ x \in X \colon\ f(x) \ge v \right\}.$$

Tenemos las siguientes desigualdades:

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \ge \int\limits_{G(f,v)} f \,\mathrm{d}\mu \ge \int\limits_{G(f,v)} v \,\mathrm{d}\mu$$

Primera demostración

$$G(f, v) := \left\{ x \in X : \ f(x) \geq v \right\}.$$

Tenemos las siguientes desigualdades:

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int\limits_{G(f,v)} f \, \mathrm{d}\mu \geq \int\limits_{G(f,v)} v \, \mathrm{d}\mu =$$

Primera demostración

$$G(f,v) := \Big\{ x \in X\colon\ \ f(x) \ge v \Big\}.$$

Tenemos las siguientes desigualdades:

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu \ge \int\limits_{G(f,v)} f\,\mathrm{d}\mu \ge \int\limits_{G(f,v)} v\,\mathrm{d}\mu = v\,\mu(G(f,v)).$$

Primera demostración

$$G(f, v) := \Big\{ x \in X \colon \; f(x) \geq v \Big\}.$$

Tenemos las siguientes desigualdades:

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int\limits_{G(f,v)} f \, \mathrm{d}\mu \geq \int\limits_{G(f,v)} v \, \mathrm{d}\mu = v \, \mu(G(f, v)).$$

Dividimos entre v y obtenemos la desigualdad deseada.

Primera demostración

$$G(f, v) := \Big\{ x \in X \colon\ f(x) \ge v \Big\}.$$

Tenemos las siguientes desigualdades:

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \ge \int\limits_{G(f,v)} f \,\mathrm{d}\mu \ge \int\limits_{G(f,v)} v \,\mathrm{d}\mu = v\,\mu(G(f, v)).$$

Dividimos entre v y obtenemos la desigualdad deseada.

Ejercicio: justificar bien cada paso.

Segunda demostración

Notemos que

$$f \geq v\,1_{G(f,v)}.$$

Segunda demostración

Notemos que

$$f \geq v\,1_{G(f,v)}.$$

Luego

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu$$

Segunda demostración

Notemos que

$$f \geq v\, 1_{G(f,v)}.$$

Luego

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq$$

Segunda demostración

Notemos que

$$f \geq v\,1_{G(f,v)}.$$

Luego

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int\limits_X v\,1_{A(f,v)}\,\mathrm{d}\mu$$

Segunda demostración

Notemos que

$$f \geq v\,1_{G(f,v)}.$$

Luego

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X v\,1_{A(f,v)} \,\mathrm{d}\mu =$$

Segunda demostración

Notemos que

$$f \geq v\,1_{G(f,v)}.$$

Luego

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X v\,1_{A(f,v)} \,\mathrm{d}\mu = v\,\mu(A(f,v)).$$

Segunda demostración

Notemos que

$$f \geq v\, 1_{G(f,v)}.$$

Luego

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int\limits_X v\, 1_{A(f,v)} \,\mathrm{d}\mu = v\, \mu(A(f,v)).$$

Ejercicio: justificar bien cada paso.

Acotación del conjunto que corresponde al valor infinito

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tal que

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Definimos

$$E := \{x \in X\colon\ f(x) = +\infty\}.$$

Demostrar que $\mu(E) = 0$.

Sugerencias:

- comparar E con $G(f, v)$,
- aplicar la desigualdad de Márkov.

Aplicación a una función no negativa con integral nula

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tal que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostrar que $\mu(P) = 0$, donde

$$P := \Big\{ x \in X : \ f(x) > 0 \Big\}.$$

Sugerencias

- Para cada $v > 0$, demostrar que
$$\mu(G(f, v)) = 0.$$
- Demostrar que
$$\left]0, +\infty\right] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{k}, +\infty\right].$$
- Demostrar que
$$P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G\left(f, \frac{1}{k}\right).$$
- Demostrar que $\mu(P) = 0$.

¿Cuándo la integral de una función positiva es cero?

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ?$$

Desigualdad de Márkov para composiciones de funciones

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Además, sea $g\colon [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ una función creciente.

Entonces, para cada $v > 0$,

$$\mu\Big(\{x \in X\colon\ f(x) \geq v\}\Big) \leq \frac{1}{g(v)} \int\limits_X g \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración

Notamos que

$$\forall x \in X \qquad \Big(f(x) \geq v\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(g(f(x)) \geq g(v)\Big).$$

Idea de demostración

Notamos que

$$\forall x \in X \qquad \Big(f(x) \geq v\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(g(f(x)) \geq g(v)\Big).$$

Por lo tanto,

$$\{x \in X \colon\ f(x) \geq v\} \ \subseteq\ \{x \in X \colon\ g(f(x)) \geq g(v)\}.$$

Idea de demostración

Notamos que

$$\forall x \in X \qquad \Big(f(x) \geq v\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(g(f(x)) \geq g(v)\Big).$$

Por lo tanto,

$$\{x \in X \colon\ f(x) \geq v\} \ \subseteq \ \{x \in X \colon\ g(f(x)) \geq g(v)\}.$$

Aplicamos la desigualdad de Márkov a $g \circ f$.

Caso particular $g(t) = t^p$

Sea $p > 0$. Escribir la proposición anterior para $g(t) = t^p$.