Espacios L^p, $1 \le p < +\infty$

(un tema del curso “Análisis funcional”)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

12 de octubre de 2020

Objetivos

Vamos a repasar los siguientes temas.

- Demostraciones de las desigualdades de Hölder y Minkowski.
- La definición de los espacios $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ y $L^p(X,\mu)$, para $1 \leq p < +\infty$.
- Demostración de la completez de $L^p(X,\mu)$.

Prerrequisitos

- La desigualdad de Young y la desigualdad $(\alpha+\beta)^p \leq 2^{p-1}(\alpha^p+\beta^p)$.
- La desigualdad de Chebyshov–Márkov.
- Espacios cocientes de espacios normados y seminormados.
- La convergencia de Cauchy en medida,
  existencia de una subsucesión convergente casi uniforme.
- El lema de Fatou.

Aplicaciones

- El espacio L^2 surge de manera natural en varios modelos de física, especialmente de mecánica cuántica.
  La razón informal: la energía cinética involucra el cuadrado.
- El espacio L^1 es natural para estudiar la convolución y sus aplicaciones.
- El espacio L^∞ es un ejemplo típico de álgebra de von Neumann.
- La completez hace un papel crucial en varios teoremas sobre estos espacios.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

El vector cero de este espacio es la función constante cero 0_X.

La seminorma extendida N_p, $1 \le p < +\infty$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \to [0, +\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

También se define $N_p(f)$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

La seminorma extendida N_p, $1 \le p < +\infty$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \to [0, +\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

También se define $N_p(f)$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Ejercicio. Demostrar que N_p es absolutamente homogénea:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \forall f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \qquad N_p(\lambda f) = |\lambda| \, N_p(f).$$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

$$A := \{x \in X\colon \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\quad \mu(A) = 0 \quad$ y

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

$$A := \{x \in X\colon \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\quad \mu(A) = 0 \quad$ y $\quad N_p^p(f) = \int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus A} f^p \,\mathrm{d}\mu + \int_A f^p \,\mathrm{d}\mu = 0.$

Demostración de $\Longrightarrow$.

Supongamos que $N_p(f) = 0$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) > 0\}, \qquad B_m := \left\{x \in X : \quad f(x) \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Demostración de $\Longrightarrow$.

Supongamos que $N_p(f) = 0$.

$$A := \{x \in X\colon \quad f(x) > 0\}, \qquad B_m := \left\{x \in X\colon \quad f(x) \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Por la desigualdad de Chebyshov–Márkov,

$$\mu(B_m) = \mu\left(\left\{x \in X\colon \quad f^p(x) \geq \frac{1}{m^p}\right\}\right) \leq m^p \int_X f^p \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostración de $\Longrightarrow$.

Supongamos que $N_p(f) = 0$.

$$A := \{x \in X\colon \quad f(x) > 0\}, \qquad B_m := \left\{x \in X\colon \quad f(x) \ge \frac{1}{m}\right\}.$$

Por la desigualdad de Chebyshov–Márkov,

$$\mu(B_m) = \mu\left(\left\{x \in X\colon \quad f^p(x) \ge \frac{1}{m^p}\right\}\right) \le m^p \int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Como $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$,

$$\mu(A) \le \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) = 0.$$

Desigualdad de Young (repaso)

Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Desigualdad de Young (repaso)

Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ejercicio. Demostrar la desigualdad de Young usando la convexidad de la función $\exp_{\mathbb{R}}$.

Desigualdad de Young (repaso)

Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ejercicio. Demostrar la desigualdad de Young usando la convexidad de la función $\exp_{\mathbb{R}}$.

Ejercicio. ¿Cuándo se alcanza una igualdad en la desigualdad de Young?

Sugerencia: usar la convexidad estricta de $\exp_{\mathbb{R}}$.

Desigualdad de Hölder para funciones medibles

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g).$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(fg) \leq N_p(f)N_q(g).$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(fg) \leq N_p(f)N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(fg) \leq N_p(f)N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(fg) = 0$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(fg) = 0$.

Caso $N_q(g) = 0$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(fg) \leq N_p(f)N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(fg) = 0$.

Caso $N_q(g) = 0$: $g \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(fg) = 0$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(fg) \leq N_p(f)N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(fg) = 0$.

Caso $N_q(g) = 0$: $\quad g \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(fg) = 0$.

Caso $N_p(f) > 0$, $N_q(g) > 0$, $N_p(f) = +\infty$ o $N_q(g) = +\infty$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X$, luego $N_1(fg) = 0$.

Caso $N_q(g) = 0$: $\quad g \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X$, luego $N_1(fg) = 0$.

Caso $N_p(f) > 0$, $N_q(g) > 0$, $N_p(f) = +\infty$ o $N_q(g) = +\infty$: $\quad$ el lado derecho es $+\infty$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Luego integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(fg) \le \frac{1}{p\,N_p^p(f)}\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q\,N_q^q(g)}\int_X g^q\,\mathrm{d}\mu$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Luego integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(fg) \le \frac{1}{p\,N_p^p(f)} \int_X f^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q\,N_q^q(g)} \int_X g^q \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \frac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \frac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Luego integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(fg) \le \frac{1}{p\,N_p^p(f)}\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q\,N_q^q(g)}\int_X g^q\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Desigualdad de Hölder para funciones medibles complejas

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g).$$

Desigualdad de Hölder para funciones medibles complejas

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g).$$

Ejercicio (criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder).

Demostrar que $N_1(fg) = N_p(f)N_q(g)$ si, y solo si,

$$\exists \alpha, \beta \geq 0 \qquad (\alpha + \beta > 0) \quad \wedge \quad \left(\alpha |f|^p \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} \beta |g|^q \right).$$

Una desigualdad para $(a+b)^p$

Proposición

Sean $a, b \geq 0$, $1 \leq p < +\infty$. Entonces

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Una desigualdad para $(a+b)^p$

Proposición

Sean $a, b \geq 0$, $1 \leq p < +\infty$. Entonces

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Ejercicio. Demostrar esta propiedad usando la convexidad de la función

$$f_p(x) := x^p.$$

Desigualdad de Minkowski para funciones medibles

Proposición

Sean $p \in [1, +\infty)$, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$. Entonces

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Desigualdad de Minkowski, casos triviales

Por demostrar:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Desigualdad de Minkowski, casos triviales

Por demostrar:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Caso $N_p(f) = +\infty$ o $N_p(g) = +\infty$:

Desigualdad de Minkowski, casos triviales

Por demostrar:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Caso $N_p(f) = +\infty$ o $N_p(g) = +\infty$: En este caso el lado derecho es $+\infty$.

Desigualdad de Minkowski, casos triviales

Por demostrar:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Caso $N_p(f) = +\infty$ o $N_p(g) = +\infty$: En este caso el lado derecho es $+\infty$.

Caso $N_p(f+g) = 0$:

Desigualdad de Minkowski, casos triviales

Por demostrar:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Caso $N_p(f) = +\infty$ o $N_p(g) = +\infty$: En este caso el lado derecho es $+\infty$.

Caso $N_p(f+g) = 0$: el lado izquierdo es cero.

Desigualdad de Minkowski, casos triviales

Por demostrar:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Caso $N_p(f) = +\infty$ o $N_p(g) = +\infty$: En este caso el lado derecho es $+\infty$.

Caso $N_p(f+g) = 0$: el lado izquierdo es cero.

Caso $p = 1$: para cada x en X tenemos

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

Al integrar, obtenemos el resultado.

Una cota inprecisa para $N_p(f+g)$

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$. Para cada x en X,

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p+|g(x)|^p).$$

Una cota inprecisa para $N_p(f+g)$

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$. Para cada x en X,

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p+|g(x)|^p).$$

Integramos

$$N_p^p(f+g) \leq 2^{p-1}(N_p^p(f)+N_p^p(g)).$$

Una cota inprecisa para $N_p(f+g)$

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$. Para cada x en X,

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p+|g(x)|^p).$$

Integramos

$$N_p^p(f+g) \leq 2^{p-1}(N_p^p(f)+N_p^p(g)).$$

Si $N_p(f) < +\infty$ y $N_p(g) < +\infty$, entonces $N_p(f+g) < +\infty$.

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$N_p^p(f+g) =$$

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$N_p^p(f+g) = \int_X |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu =$$

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$N_p^p(f+g) = \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f+g|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu$$

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$
\begin{aligned}
N_p^p(f+g) &= \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f+g|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_X |f||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu + \int_X |g||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}
$$

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$
\begin{aligned}
N_p^p(f+g) &= \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f+g|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_X |f||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu + \int_X |g||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu \\
\text{(Hölder)} \quad &\le
\end{aligned}
$$

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$\begin{aligned}
N_p^p(f+g) &= \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f+g|\,|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_X |f||f+g|^{p/q}\,\mathrm{d}\mu + \int_X |g||f+g|^{p/q}\,\mathrm{d}\mu \\
\text{(Hölder)} \qquad &\le N_p(f)N_p^{p/q}(f+g) + N_p(g)N_p^{p/q}(f+g).
\end{aligned}$$

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$
\begin{aligned}
N_p^p(f+g) &= \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f+g|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_X |f||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu + \int_X |g||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu \\
\text{(Hölder)} \qquad &\le N_p(f) N_p^{p/q}(f+g) + N_p(g) N_p^{p/q}(f+g).
\end{aligned}
$$

Dividimos entre $N_p^{p/q}(f+g)$ y usamos el hecho que $p - \frac{p}{q} = 1$.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Minkowski

Ejercicio. Sea $p \in (1, +\infty)$ y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$.
Determinar, cuando

$$N_p(f+g) = N_p(f) + N_p(g).$$

Espacio $\mathcal{L}^p(X, \mu)$

Primero, nos restringimos a las funciones en las cuales la seminorma N_p es finita:

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) := \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) : \quad N_p(f) < +\infty\}.$$

Espacio $\mathcal{L}^p(X, \mu)$

Primero, nos restringimos a las funciones en las cuales la seminorma N_p es finita:

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) := \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \colon \quad N_p(f) < +\infty\}.$$

Denotamos por $\widetilde{N}_p$ la restricción de N_p a $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

Espacio $\mathcal{L}^p(X, \mu)$

Primero, nos restringimos a las funciones en las cuales la seminorma N_p es finita:

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) := \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) : \quad N_p(f) < +\infty\}.$$

Denotamos por $\widetilde{N}_p$ la restricción de N_p a $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

El espacio $(\mathcal{L}^p(X, \mu), \widetilde{N}_p)$ es seminormado.

Funciones que se anulan μ-c.t.p.

$$\mathcal{Z}(X,\mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\}.$$

Funciones que se anulan μ-c.t.p.

$$\mathcal{Z}(X,\mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) : \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\}.$$

Como ya vimos, $\quad \{ f \in \mathcal{L}^p(X,\mu) : \quad \widetilde{N}_p(f) = 0 \} = \mathcal{Z}(X,\mu).$

Funciones que se anulan μ-c.t.p.

$$\mathcal{Z}(X,\mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\}.$$

Como ya vimos, $\quad \{f \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \colon \quad \widetilde{N}_p(f) = 0\} = \mathcal{Z}(X,\mu).$

Ejercicio. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X,\mu)$, $f - g \in \mathcal{Z}(X,\mu)$. Mostrar que

$$N_p(f) = N_p(g).$$

Funciones que se anulan μ-c.t.p.

$$\mathcal{Z}(X,\mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\}.$$

Como ya vimos, $\quad \{f \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \colon \quad \widetilde{N}_p(f) = 0\} = \mathcal{Z}(X,\mu).$

Ejercicio. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X,\mu)$, $f - g \in \mathcal{Z}(X,\mu)$. Mostrar que

$$N_p(f) = N_p(g).$$

Ejercicio. Mostrar que $\mathcal{Z}(X,\mu)$ es cerrado en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Espacio $L^p(X, \mu)$

$$L^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu)/\mathcal{Z}(X, \mu).$$

Espacio $L^p(X, \mu)$

$$L^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu)/\mathcal{Z}(X, \mu).$$

La norma en $L^p(X, \mu)$ se define como

$$\|F\|_p := \inf_{f \in F} N_p(f), \qquad \text{i.e.} \qquad \|f + \mathcal{Z}(X, \mu)\|_p := \inf_{\substack{g \in \mathcal{L}^p(X,\mu) \\ g - f \in \mathcal{Z}(X,\mu)}} N_p(g).$$

Espacio $L^p(X,\mu)$

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

La norma en $L^p(X,\mu)$ se define como

$$\|F\|_p := \inf_{f\in F} N_p(f), \qquad \text{i.e.} \qquad \|f+\mathcal{Z}(X,\mu)\|_p := \inf_{\substack{g\in\mathcal{L}^p(X,\mu)\\ g-f\in\mathcal{Z}(X,\mu)}} N_p(g).$$

Otra definición equivalente:

$$\|f+\mathcal{Z}(X,\mu)\|_p := N_p(f).$$

Convexidad estricta de la bola unitaria cerrada en L^p, $1 < p < +\infty$

Ejercicio. Sea $1 < p < +\infty$. Demostrar que la bola unitaria cerrada en $L^p(X,\mu)$ es estrictamente convexa, esto es, para cualesquier $F, G \in L^p(X,\mu)$

$$\|F\|_p \le 1, \qquad \|G\|_p \le 1, \qquad F \neq G,$$

y para cualquier λ en $(0,1)$, se cumple la desigualdad

$$\|(1-\lambda)F + \lambda G\|_p < 1.$$

Sugerencia: usar el criterio de igualdad en la desigualdad de Minkowski.

Sucesiones de Cauchy en medida

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X,\mu)^{\mathbb{N}}$.

Para $\varepsilon > 0$ y $m, n \in \mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, m, n) := \{x \in X: \quad |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Sucesiones de Cauchy en medida

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X,\mu)^{\mathbb{N}}$.

Para $\varepsilon > 0$ y $m, n \in \mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, m, n) := \{x \in X : \quad |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{m,n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, m, n)) = 0,$$

esto es,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \forall \delta > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall m, n \geq k \qquad \mu(A(\varepsilon, m, n)) < \delta.$$

De una sucesión de Cauchy en medida se puede sacar una sucesión convergente casi uniformemente

Tarea. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en medida.
Entonces existen $\nu\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estrictamente creciente, $g\in\mathcal{M}(X,\mu)$, tales que

$$f_{\nu(k)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g.$$

Corolario

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Entonces existen $\nu\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estrictamente creciente, $g\in\mathcal{M}(X,\mu)$, tales que

$$f_{\nu(k)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g.$$

Corolario

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Entonces existen $\nu\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estrictamente creciente, $g\in\mathcal{M}(X,\mu)$, tales que

$$f_{\nu(k)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g.$$

Demostración. Verifiquemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida.

Corolario

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Entonces existen $\nu\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estrictamente creciente, $g\in\mathcal{M}(X,\mu)$, tales que

$$f_{\nu(k)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g.$$

Demostración. Verifiquemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida.

Por la desigualdad de Chebyshov–Márkov,

$$\mu\left(\{x\in X\colon\quad |f_m(x)-f_n(x)|^p \geq \varepsilon^p\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^p}\int_X |f_m-f_n|^p \,\mathrm{d}\mu,$$

esto es,

$$\mu(A(\varepsilon,m,n)) \leq \frac{N_p^p(f_m-f_n)}{\varepsilon^p}.$$

□

Completez de L^p

Teorema

El espacio normado $L^p(X,\mu)$ es completo.

Completez de L^p

Teorema

El espacio normado $L^p(X, \mu)$ es completo.

Como $L^p(X, \mu)$ es el espacio cociente $\mathcal{L}^p(X, \mu)/\mathcal{Z}(X, \mu)$, es suficiente demostrar el siguiente resultado.

Completez de L^p

Teorema

El espacio normado $L^p(X, \mu)$ es completo.

Como $L^p(X, \mu)$ es el espacio cociente $\mathcal{L}^p(X, \mu)/\mathcal{Z}(X, \mu)$, es suficiente demostrar el siguiente resultado.

Teorema

El espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ es completo.

Completez de $\mathcal{L}^p$, demostración

Consideremos un caso especial:

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$,
- existe $g \in \mathcal{M}(X,\mu)$ tal que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy,

$$N_p(f_{k+1} - f_k) \le \frac{1}{2^{k+1}} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Completez de $\mathcal{L}^p$, demostración

Consideremos un caso especial:

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$,
- existe $g \in \mathcal{M}(X,\mu)$ tal que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy,

$$N_p(f_{k+1} - f_k) \le \frac{1}{2^{k+1}} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Por la desigualdad de Minkowski, para $m > n$,

$$N_p(f_m - f_n) \le \sum_{k=n}^{m-1} N_p(f_{k+1} - f_k) \le \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^n}.$$

Completez de $\mathcal{L}^p$, demostración

Para $m > n$,

$$N_p(f_m - f_n) \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \text{esto es,} \qquad \int_X |f_m - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{2^{np}}.$$

Completez de $\mathcal{L}^p$, demostración

Para $m > n$,

$$N_p(f_m - f_n) \le \frac{1}{2^n}, \qquad \text{esto es,} \qquad \int_X |f_m - f_n|^p \,\mathrm{d}\mu \le \frac{1}{2^{np}}.$$

Aplicamos la desigualdad de Fatou, cuando n es fijo y $m \to \infty$:

$$\int_X \liminf_{m\to\infty} |f_m - f_n|^p \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int_X |f_m - f_n|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

$$\int_X |g - f_n|^p \,\mathrm{d}\mu \le \frac{1}{2^{np}}.$$

Completez de $\mathcal{L}^p$, demostración

Para $m > n$,

$$N_p(f_m - f_n) \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \text{esto es,} \qquad \int_X |f_m - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{2^{np}}.$$

Aplicamos la desigualdad de Fatou, cuando n es fijo y $m \to \infty$:

$$\int_X \liminf_{m\to\infty} |f_m - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{m\to\infty} \int_X |f_m - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu.$$

$$\int_X |g - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{2^{np}}.$$

Elevamos a $1/p$: $N_p(f_n - g) \leq \dfrac{1}{2^n}.$

$$N_p(f_n - g) \leq \frac{1}{2^n}.$$

$$N_p(f_n - g) \leq \frac{1}{2^n}.$$

En particular,

$$N_p(g) \leq N_p(g - f_1) + N_p(f_1) < +\infty.$$

$$N_p(f_n - g) \leq \frac{1}{2^n}.$$

En particular,

$$N_p(g) \leq N_p(g - f_1) + N_p(f_1) < +\infty.$$

Hemos demostrado que $g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ y $f_n \to g$ en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

$$N_p(f_n - g) \leq \frac{1}{2^n}.$$

En particular,

$$N_p(g) \leq N_p(g - f_1) + N_p(f_1) < +\infty.$$

Hemos demostrado que $g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ y $f_n \to g$ en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

Ejercicio. ¿Por qué podemos suponer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy en $\mathcal{L}^p$? ¿Por qué podemos suponer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-c.t.p. a una función g?